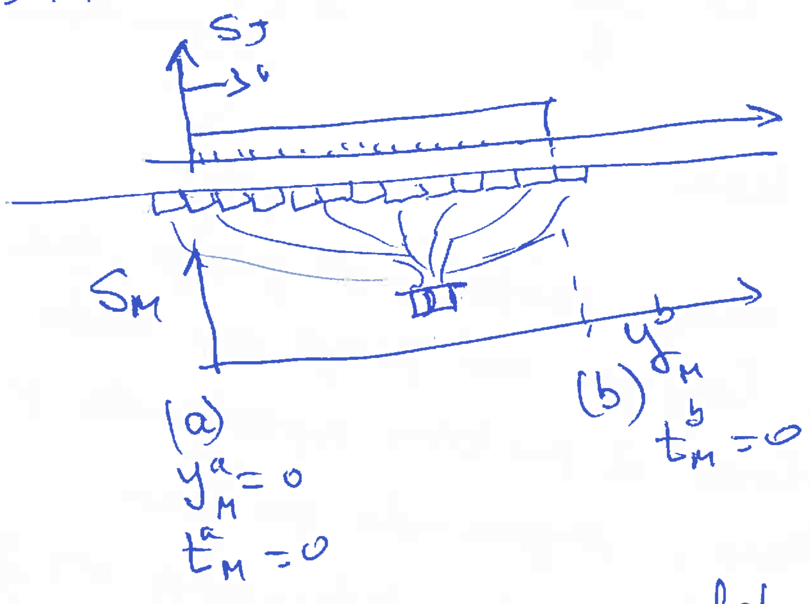
Transformações de Lorentz
Espaço e Tempo

Aula 22

- Ex.1 - Régua Contraída.
- Régua de $\lambda = 10\,m$ em um trem com $v = \frac{4}{5}c$
- Na estação, Maria coloca um grande número de câmeras fotográficas, uma ao lado da outra, (total > 10 m) ligadas por fios a um único disparador. (todos disparam simultaneamente, no referencial da estação)
- Quando a régua está passando, Maria aciona o disparador. A régua toda é fotografada no instante $t_M = 0$. Vamos colocar a origem do S_J na extremidade da régua.



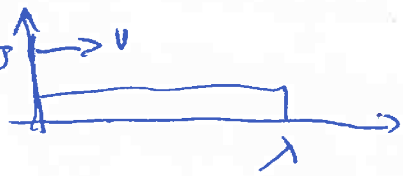
- Maria então examina as fotos e determina o comprimento da régua $L = y^b_M - y^a_M$
y^b_M, y^a_M com $t^b_M = t^a_M = 0$
(y^b_M e y^a_M foram medidos simultaneamente em $t^b_M = t^a_M = 0$)

evento (a): extremidade esquerda da régua passa pr $y_M^a = 0$ Essa extremidade está em $y_J^a = 0$

$S_M: (0,0,0,0)$

$S_J\ (0,0,0,0)$

evento (b) extremidade direita da régua está em $y_M^b = L$ tb no instante $t_M^b = 0$



$S_M: (0,L,0,0)$

$S_J\ (0,\lambda,0,t_J^b)$ $y_M^b = L$ $y_J^b = \lambda$

$$\lambda = y_J^b = \gamma(y_M^b - v t_M^b) = \gamma(L-0) = \gamma L$$

$$L = \frac{\lambda}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{5}{3} \qquad \boxed{L = 10\cdot\frac{3}{5} = 6m}$$

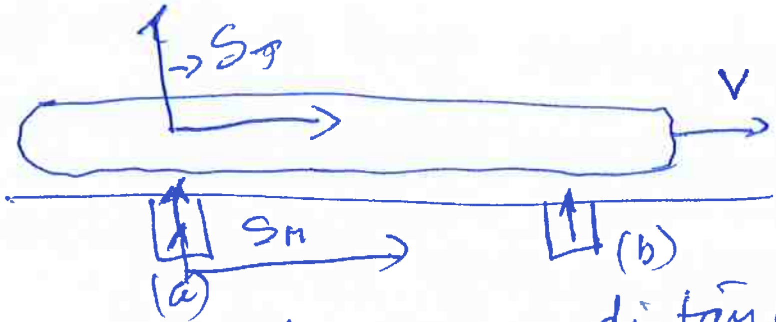
Ex. 2 - Prego no trem

- Maria coloca 2 dessas pistolas de prego, que, com ar comprimido, lançam um prego em alta velocidade. Ela coloca 2 pistolas apontando p/ onde vai passar o trem, separados pr uma distância $\lambda = 10m$. O trem tem velocidade $v = \frac{3}{5}c$

($\gamma = \frac{5}{4}$)

(2)

— Quando o trem passa, Maria aciona simultaneamente as duas pistolas, Dois pregos são parcialmente introduzidos na lateral do trem.



Maria então sabe que a distância entre os pregos no trem, é a mesma que a que separa os 2 martelos: $L_M = \lambda = 10m$.

Para determinarmos o que será observado (medido) pa João, vamos considerar.

Evento (a): Prego à esquerda é disparado. Nesse momento ($t_M^a = 0$) as origens dos sistemas S_J e S_M coincidem. $y_M^a = 0$, $y_J^a = 0$

$$S_M: (0,0,0,0) \qquad S_J: (0,0,0,0)$$

Evento (b): Prego à direita de Maria é disparado. Maria determina $t_M^b = 0$ $y_M^b = \lambda$

João mede: $$t_J^b = \gamma\left(t_M^b - \frac{v}{c^2} y_M^b\right) = -\frac{\gamma v \lambda}{c^2} \quad (t_J^b < t_J^a)$$

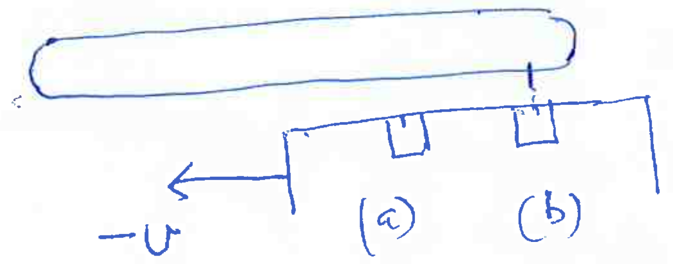
$$y_J^b = \gamma(y_M^b - v t_M^b) = \gamma\lambda$$

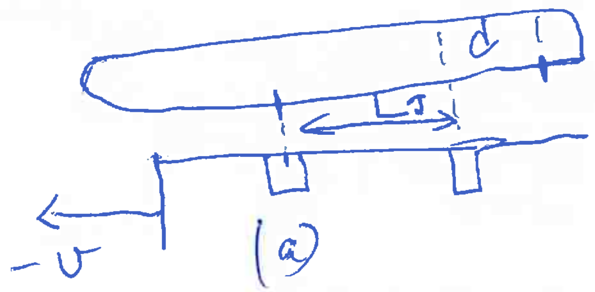
João determina a distância D entre os pregos fixados no trem: $D = y_J^b - y_J^a = \gamma\lambda$

$\gamma = \frac{5}{4}$ $D = \frac{5 \cdot 10}{4} = 12{,}5\,m$

João quer agora determinar qual a distância entre ~~o disparo~~ as pistolas que estavam na estação.

João vê em $t_J^b = -\frac{\gamma v}{c^2}\lambda$ o prego (b) ser disparado e em seguida, em $t_J^a = 0$ o prego (a).





João sabe que D, a distância entre o pregos no trem é igual a L_J, a distância entre as pistolas mais d, a distância que a estação se deslocou no intervalo de tempo entre (b) e (a).

$D = L_J + v\Delta t_J \Rightarrow L_J = D - v\Delta t_J = \gamma\lambda - v \cdot \frac{\gamma v}{c^2}\lambda$

$\boxed{L_J = \gamma\lambda\left(1 - v^2/c^2\right) = \frac{\lambda}{\gamma}}$ $L_J > \lambda$

(3)

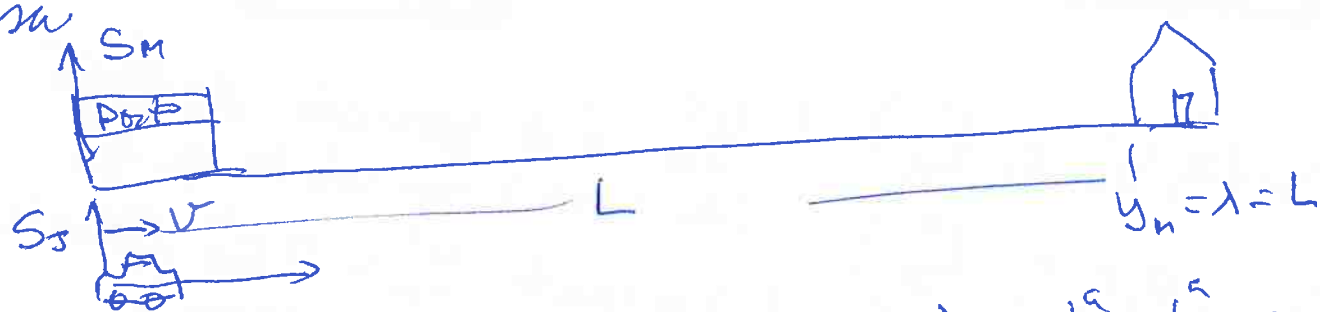
$$\boxed{L_J = \frac{\lambda}{\gamma} = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8\,m}$$

$$d = v\Delta t_J = v \cdot \frac{\gamma v}{c^2}\lambda = \gamma \frac{v^2}{c^2}\lambda = \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{25} \cdot 10 = 4{,}5\,m$$

$$D = 8 + 4.5 = 12{,}5\,m$$ A distância entre os pregos (D) é real e medida por João!!

Ex. 4 - Sinais luminosos:

- Maria está no Posto de Gasolina, separado por uma distância L de uma casa, em cuja parede, a voltada para o posto, tem um espelho.
- João passa de carro pelo posto, indo em direção a casa. No momento em que passa pelo Posto, Maria dispara um pulso de luz em direção à casa

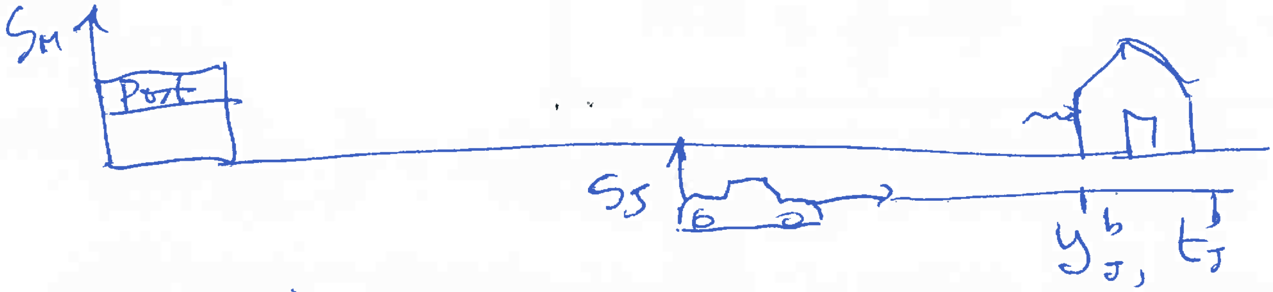


Pulso de luz disparado: evento (a) em $t_M^a = t_J^a = 0$ nesse instante $y_M^a = y_J^a = 0$

$S_M^a: (0,0,0,0)$ $\quad$ $S_J^a: (0,0,0,0)$

Para Maria, o pulso de luz atinge o espelho (evento (b)) em $t_M^b = \frac{L}{c}$, $y_M^b = L$

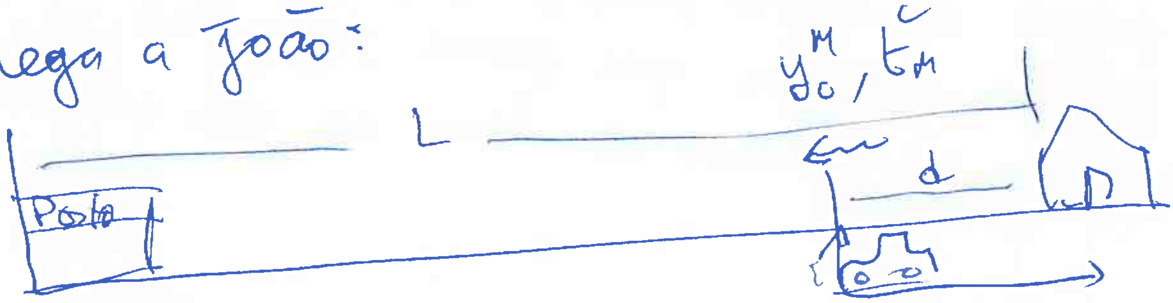
$S_M^b: (0, L, 0, \frac{L}{c})$ $\quad$ $S_J^b: (0, y_J^b, 0, t_J^b)$



$$t_J^b = \gamma\left(t_M^b - \frac{v}{c^2} y_M^b\right) = \gamma\left(\frac{L}{c} - \frac{v}{c^2} L\right) = \frac{\gamma L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$y_J^b = \gamma\left(y_M^b - v t_M^b\right) = \gamma\left(L - v\frac{L}{c}\right) = \gamma L\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Evento (c). A luz refletida pelo espelho chega a João:



$S_M: (0, y_M^c, 0, t_M^c)$

$S_J: (0, 0, 0, t_J^c)$

y_M^c é a posição de João (do carro) no instante t_M^c. Portanto $y_M^c = v t_M^c$ (distância percorrida pelo carro).

Mas $y_M^c = L - d$. d é a distância percorrida pelo meio de luz entre t_M^b e t_M^c: $d = c(t_M^c - t_M^b)$

$$y_M^c = v t_M^c = L - c(t_M^c - t_M^b)$$

$$t_M^c (c + v) = L + c t_M^b = 2L \qquad \boxed{t_M^c = \frac{2L}{c+v}}$$

$$t_J^c = \gamma\left(t_M^c - \frac{v}{c^2} y_M^c\right) = \gamma\left(t_M^c - \frac{v^2}{c^2} t_M^c\right)$$

$$t_J^c = \gamma t_M^c \left(1 - v^2/c^2\right) = \frac{t_{Mc}}{\gamma} = \boxed{\frac{2L}{\gamma(c+v)}}$$

Velocidade da luz, medida por João:

$$v_J^{luz} = \frac{\Delta y_J}{\Delta t_J} \quad \text{onde} \quad \Delta y_J = y_J^c - y_J^b \quad \text{e}$$
$$\Delta t_J = t_J^c - t_J^b$$

$$y_J^b = \gamma L\left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad y_J^c = 0 \quad \boxed{\Delta y_J = -\gamma L\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

$$t_c^J = \frac{2L}{\gamma(c+v)} = \frac{2L}{\gamma c\left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \frac{2L(1 - v/c)}{\gamma c\left(1 - v^2/c^2\right)} = \frac{2\gamma L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$t_J^b = \frac{\gamma L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\Delta t_J = \frac{2\gamma L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) - \frac{\gamma L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{\gamma L}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$v_J^{luz} = \frac{\Delta y_J}{\Delta t_J} = \frac{-\gamma L(1 - v/c)}{\frac{\gamma L}{c}(1 - v/c)} = \boxed{-c}$$

$$\boxed{v_{João}^{luz} = -c}$$

Paradoxo dos Gêmeos

- gêmeos Ana e Bruna. Ana fica em casa e Bruna faz uma viagem de Trem. Enquanto para Ana passa um tempo Δt_A, para Bruna passou $\Delta t_B = \frac{\Delta t_A}{\gamma}$, $\Delta t_B < \Delta t_A$

$\Rightarrow$ Bruna envelheceu menos que Ana!!

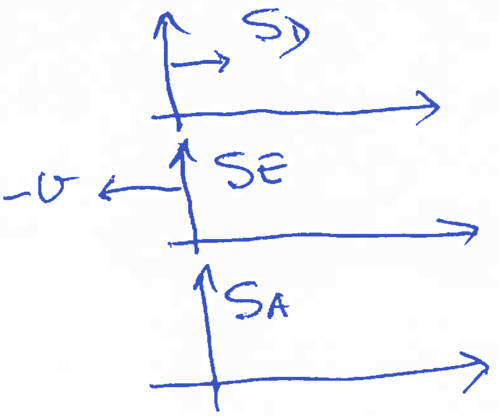
Já do ponto de vista de ~~Ana~~ Bruna, ~~foi~~ ela está parada e Ana, junto com a estação é que se deslocam, com velocidade ~~-~~ $-v$.
Então, para Bruna, é Ana que envelhece menos! Esse é o paradoxo.

Se compararmos as idades de Ana e Bruna após Bruna fazer a viagem de ida e volta, quando ficarem frente a frente, ~~verão que~~ concordarão que Bruna envelheceu menos!
Agora não há mais simetria entre Ana e Bruna. Ana ficou sempre na estação, no referencial do solo $S_A = S_S$. Já Bruna, subiu no trem indo para a direita (referencial S_D)

e depois de percorrer uma distância L (medida por Ana) salta para o trem que está indo para a esquerda (referencial S_E)

S_D tem velocidade $\underline{v}$ em relação a S_A e S_E tem velocidade $-v$ em relação a S_A.

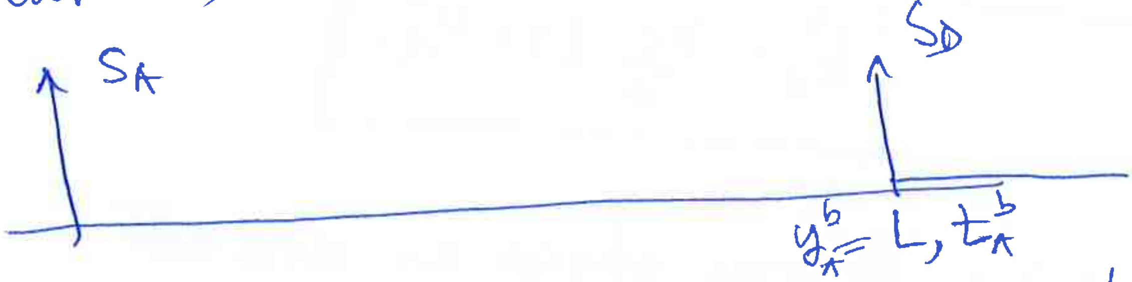
Vamos ajustar <u>todos</u> os relógios p/ $t=0$ no evento (a), quando as origens de S_A, S_D e S_E coincidem.



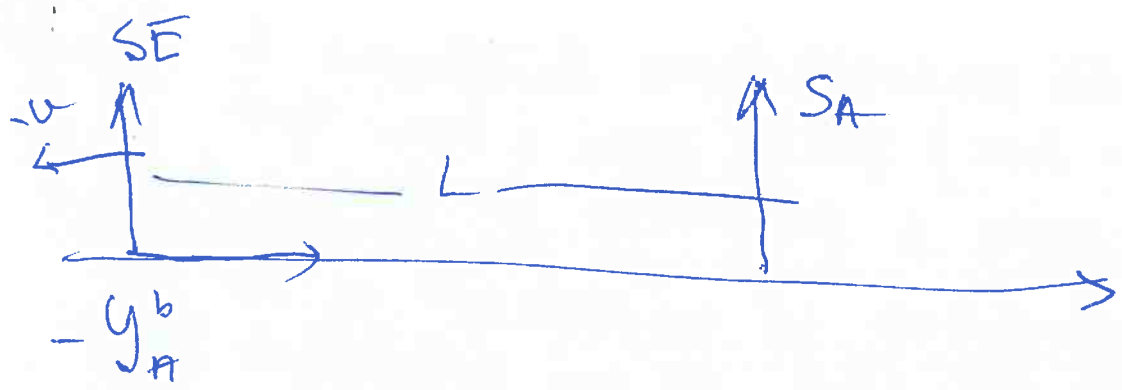
evento (a):
$S_A : (0,0,0,0)$
$S_D : (0,0,0,0)$
$S_E : (0,0,0,0)$

em (a), Bruna salta p/ o trem S_D para a viagem de ida. No final, ela andou uma distância L (medida por Ana) – <u>evento (b)</u>.

evento (b)



Nesse instante o trem E se deslocou tb uma distância L, para a esquerda.



Para Ana, o evento (b) : $y_A^b = v t_A^b = L$

$$\boxed{t_A^b = \frac{L}{v}}$$

$$S_A : \left(0, L, 0, \frac{L}{v}\right) \qquad S_D : \left(0, 0, 0, t_D^b\right)$$

$$S_E : \left(0, y_E^b, 0, t_E^b\right)$$

$$t_D^b = \gamma\left(t_A^b - \frac{v}{c^2} L\right) = \gamma\left(\frac{L}{v} - \frac{v^2}{c^2}\frac{L}{v}\right) = \frac{\gamma L}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\boxed{t_D^b = \frac{L}{\gamma v}}$$

$$y_E^b = \gamma\left(y_A^b + v t_A^b\right) = \gamma\left(L + \frac{vL}{v}\right) = 2\gamma L$$

$$\boxed{y_E^b = 2\gamma L}$$

$$t_E^b = \gamma\left(t_A^b + \frac{v}{c^2} y_A^b\right) = \gamma\left(\frac{L}{v} + \frac{v^2}{c^2}\frac{L}{v}\right)$$

$$\boxed{t_E^b = \gamma \frac{L}{v}\left(1 + v^2/c^2\right)}$$

Evento (c): Bruna chega na estação onde está Ana. Para Ana, Bruna andou uma distância L na viagem de ida $\Delta t_A^{ida} = \frac{L}{v}$

e tb uma distância L na volta, com velocidade de mesmo módulo. Portanto, para Ana, $\Delta t_A^{volta} = \frac{L}{v}$ e a duração total da viagem, $\boxed{\Delta t_A^{total} = \frac{2L}{v}}$

Já para Bruna, a viagem de ida teve duração (medida por ela, no referencial S_D) : $\Delta t_B^{ida} = t_D^b - t_D^a = t_D^b = \frac{L}{\gamma v}$

A duração da viagem de volta ~~foi~~ tb medida por Bruna, agora em S_E :

$$\Delta t_B^{volta} = t_E^c - t_E^b = \frac{2\gamma L}{v} - \frac{\gamma L}{v}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{\gamma L}{v}\left(2-\left(1+v^2/c^2\right)\right) = \frac{\gamma L}{v}\left(1-v^2/c^2\right)$$

$$\Delta t_B^{volta} = \frac{L}{\gamma v}$$

Portanto $\boxed{\Delta t_B^{total} = \frac{2L}{\gamma v}}$ $\boxed{\Delta t_B^{total} < \Delta t_A^{total}}$