relatividade - momento e energia

M.R. Robilotta - 2015

I. QUADRIMOMENTO

Esta seção foi escrita em colaboração com F.B. Kneubil.

- Os conceitos de momento e energia são úteis porque correspondem a grandezas conservadas. Na relatividade, desejamos que as conservações do momento e da energia sejam válidas para todos os referenciais inerciais.
- Na mecânica clássica, o conceito de momento foi introduzido por volta de 1650 enquanto o de energia surgiu somente dois séculos mais tarde.

Na física clássica, o momento e a energia cinética de um corpo de massa m , com velocidade $\mathbf{u}_a$ no sistema de referência S_a , são dados por

$$\mathbf{p}_a = m \mathbf{u}_a , \quad (1)$$

$$E_a = \frac{m \mathbf{u}_a^2}{2} . \quad (2)$$

No caso de um choque elástico, as conservações de momento e energia em S_a são expressas por

$$\Sigma \mathbf{p}_a = \Sigma \mathbf{p}'_a , \quad (3)$$

$$\Sigma E_a = \Sigma E'_a , \quad (4)$$

onde $\mathbf{p}_a, E_a$ são os valores iniciais e $\mathbf{p}'_a, E'_a$, os finais. Na mecânica clássica, se passarmos para um outro referencial S_b , que se move com velocidade $\mathbf{v}$ relativamente a S_a , a regra de adição de velocidades $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_a + \mathbf{v}$ promove as transformações $\mathbf{p}_a \rightarrow \mathbf{p}_b, E_a \rightarrow E_b$, mas *mantém*, para os novos valores dessas grandezas, relações do tipo

$$\Sigma \mathbf{p}_b = \Sigma \mathbf{p}'_b , \quad (5)$$

$$\Sigma E_b = \Sigma E'_b , \quad (6)$$

que expressa as conservações em S_b . Em outras palavras, as definições clássicas de momento e energia cinética, juntamente com a regra clássica de adição de velocidades, garantem a validade das leis de conservação em qualquer referencial inercial.

Na relatividade, relações do tipo $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_a + \mathbf{v}$ deixam de valer, as construções (1) e (2) tornam-se inoperantes e os conceitos de momento e energia precisam ser reconstruídos.

Esta reconstrução é guiada pela matemática. Na física clássica, o momento $\mathbf{p}$ de uma partícula é um *vetor*. Esse caráter vetorial se manifesta, por exemplo, no choque de uma bola de bilhar em movimento com outra, parada, pois a *direção e sentido* da bola incidente influenciam o que acontece depois do choque.

A eq.(1) nos informa que $\mathbf{p}$ é um vetor porque $\mathbf{u}$ é um vetor e, também porque m é uma grandeza escalar. O fato de a massa m ser um escalar significa que o seu valor não varia quando mudamos de referencial. Por isso, na eq.(1), mudanças de referencial afetam *apenas* $\mathbf{p}$ e $\mathbf{u}$, de forma concatenada. Como consequência, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{u}$ são sempre paralelos e aquela equação é corretamente covariante por rotações. Analogamente, a velocidade $\mathbf{u}$ é um vetor porque ela é dada por

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (7)$$

e o argumento se repete. Esta expressão pode ser pensada como o produto de $d\mathbf{r}$ por $1/dt$. Na mecânica newtoniana, este último fator é um escalar e o caráter vetorial de $d\mathbf{r}$ é transferido para $\mathbf{u}$.

Todos estes aspectos matemáticos do problema foram considerados por Minkowski, em 1908, quando ele estendeu a noção de momento de três para quatro dimensões. Antes de prosseguir, entretanto, é preciso situar um pouco melhor o problema. De modo geral, resultados da relatividade não podem ser *deduzidos* a partir do conhecimento da mecânica clássica, pois a segunda teoria é menos abrangente do que a primeira. Para passar da mecânica clássica para a relatividade, são necessários *saltos indutivos*, que correspondem a propostas do que o novo conhecimento poderia vir a ser, normalmente guiadas por intuição e matemática.

Foi isto o que Minkowski fez. Ele se preocupou em conceituar uma quadri-velocidade, a partir do quadri-vetor que define os eventos associados à observação das posições de uma partícula no espaço-tempo. À medida que a partícula se move, estas posições, em um dado referencial, são caracterizadas por quadri-vetores $e_1 : (ct_1; x_1, y_1, z_1)$, $e_2 : (ct_2; x_2, y_2, z_2)$, $\dots$. Para duas observações nos instantes t_1 e $t_2 = t_1 + dt$, podemos escrever $e_2 = e_1 + de$, com $de : (cdt; dx, dy, dz)$. Esta grandeza de é a extensão quadridimensional do vetor $d\mathbf{r}$ que aparece na eq.(7). Entretanto, para estender o conceito de velocidade, não podemos dividir de por dt , pois este intervalo de tempo depende do referencial e a função de/dt não é um quadri-vetor. Por isso, Minkowski propôs que a quadri-velocidade fosse definida dividindo

de pelo intervalo de tempo próprio $d\tau$. O uso do tempo próprio tanto resolve o problema matemático, pois $de/d\tau$ é um quadrivetor, como contempla a nossa intuição acerca do tempo, como expressão do ordenamento de eventos. Por estes motivos, a proposta de Minkowski foi definitivamente incorporada à relatividade e a quadri-velocidade de uma partícula é definida como

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} . \quad (8)$$

Em componentes, esta definição corresponde a

$$\dot{x}^\mu \rightarrow \left(\frac{c dt}{d\tau}; \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) . \quad (9)$$

Se quisermos, podemos expressar $\dot{x}^\mu$ em termos da velocidade $\mathbf{u}$, observada em um referencial. Para tanto, escrevemos

$$\dot{x}^\mu \rightarrow \left(\frac{c dt}{d\tau}; \frac{dt dx}{d\tau dt}, \frac{dt dy}{d\tau dt}, \frac{dt dz}{d\tau dt} \right) = \frac{dt}{d\tau} (c; u_x, u_y, u_z) \quad (10)$$

O fator $dt/d\tau$ pode ser calculado lembrando que

$$\begin{aligned} c^2 (d\tau)^2 &= c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= c^2 (dt)^2 \left[1 - \left(\frac{u_x}{c}\right)^2 - \left(\frac{u_y}{c}\right)^2 - \left(\frac{u_z}{c}\right)^2 \right] = c^2 \left(\frac{dt}{\gamma}\right)^2 . \end{aligned} \quad (11)$$

Assim, $dt/d\tau = \gamma$ e podemos escrever

$$\dot{x}^\mu \rightarrow \gamma (c; u_x, u_y, u_z) = \gamma (c; \mathbf{u}) . \quad (12)$$

Uma característica importante da quadri-velocidade é que

$$\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{u}^2) = c^2 . \quad (13)$$

Esta construção da quadri-velocidade permite a extensão do conceito de momento para quatro dimensões, escrevendo

$$p^\mu = m \dot{x}^\mu , \quad (14)$$

que, em componentes, equivale a

$$p^\mu \rightarrow (\gamma m c; \gamma m \mathbf{u}) . \quad (15)$$

Esta construção, é muito importante e, a seguir, discutimos algumas de suas implicações.

- **a massa é um escalar:** Como no caso newtoniano, eq.(1), a covariância da eq.(14) somente é possível se a massa m for um escalar relativístico, e não depender nem do referencial

nem da velocidade da partícula.

- **o tri-momento:** A componente vetorial do momento, mostrada na eq.(15), corresponde a

$$\mathbf{p} \rightarrow \gamma m \mathbf{u} . \quad (16)$$

No contexto da relatividade, esta expressão substitui a eq.(1), sendo o fator γ a diferença entre elas. Para velocidades altas, o fator γ pode ser arbitrariamente grande, mas $\gamma \rightarrow 1$ quando $u \ll c$.

- **a componente zero:** Essa componente é relacionada à energia da partícula, sendo

$$E = c p^0 = \gamma m c^2 . \quad (17)$$

Esta identificação pode parecer estranha, mas existem várias motivações para ela. Uma delas é que, no começo do século 20, já se sabia que o momento é uma grandeza associada ao espaço e, a energia, ao tempo. Uma outra motivação vem do estudo do limite de energias baixas. Para $u \ll c$, valem as aproximações

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rightarrow \frac{1}{1 - u^2/2c^2} \rightarrow 1 + \frac{u^2}{2c^2} . \quad (18)$$

Usando este resultado na eq.(17) encontramos que, para baixas velocidades,

$$E = \gamma m c^2 \rightarrow m c^2 + \frac{m u^2}{2} . \quad (19)$$

O segundo termo deste resultado corresponde à energia cinética não-relativística e reforça a interpretação usada na eq.(17). O primeiro termo, por outro lado, representa uma grande novidade, introduzida pela relatividade, e será bastante discutido na sequência.

A interpretação de p^0 por meio da eq.(17) permite escrever o quadrimomento de uma partícula como

$$p^\mu \rightarrow (E/c; \mathbf{p}) . \quad (20)$$

- **as conservações de E e $\mathbf{p}$:** No contexto da relatividade, a construção (15), que se desdobra nas relações (16) e (17), dá origem a relações de conservação válidas em quaisquer referenciais.

Para um corpo de massa m e velocidade $\mathbf{u}_a$, em relação a um referencial S_a , temos

$$E_a = \frac{m}{\sqrt{1 - u_a^2/c^2}} c^2 , \quad \mathbf{p}_a = \frac{m}{\sqrt{1 - u_a^2/c^2}} \mathbf{u}_a . \quad (21)$$

Em um outro referencial S_b , a velocidade da partícula muda e passa a ser $\mathbf{u}_b$, o mesmo acontecendo com o momento e a energia, que são expressos por

$$E_b = \frac{m}{\sqrt{1 - u_b^2/c^2}} c^2, \quad \mathbf{p}_b = \frac{m}{\sqrt{1 - u_b^2/c^2}} \mathbf{u}_b. \quad (22)$$

Para estas expressões, tanto em S_a como em S_b , valem as relações que expressam as conservações nos dois referenciais,

$$\Sigma E_a = \Sigma E'_a, \quad \Sigma \mathbf{p}_a = \Sigma \mathbf{p}'_a, \quad (23)$$

e

$$\Sigma E_b = \Sigma E'_b, \quad \Sigma \mathbf{p}_b = \Sigma \mathbf{p}'_b. \quad (24)$$

onde $(E; \mathbf{p})$ e $(E'; \mathbf{p}')$ correspondem a valores iniciais e finais.

• **de novo, a massa é um escalar:** O produto escalar do quadrimomento com ele mesmo é dado por

$$p_\mu p^\mu = (\gamma m c)^2 - (\gamma m \mathbf{u})^2 = \gamma^2(1 - \mathbf{u}^2) m^2 c^2 = m^2 c^2, \quad (25)$$

evidenciando, novamente, que a massa é um invariante relativístico.

• **uma relação entre E e $\mathbf{p}$:** Efetuando novamente o produto escalar do quadrimomento com ele mesmo, usando desta vez a eq.(20), e comparando com (25), obtemos

$$p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (26)$$

Manipulando este resultado, encontramos uma relação entre E e $\mathbf{p}$, dada por

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (27)$$

ou, alternativamente,

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (28)$$

Nas situações comuns, resultados como o da eq.(19) sugerem que a solução com sinal negativo devem ser descartadas. Entretanto, foi uma interpretação da solução negativa, no contexto da mecânica quântica, que levou Dirac à noção de *anti-matéria*, um pouco antes de 1930.

• **energia de repouso e energia cinética:** O fato de a energia de uma partícula ser escrita como

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (29)$$

indica que o seu valor é afetado pela velocidade $\mathbf{u}$, incorporada no momento $\mathbf{p}$. Isso levou à idéia de tentar dividir a eq.(29) em dois termos, um deles representando a energia que a

partícula teria se não tivesse movimento, chamado de *energia de repouso* e outro, associado ao movimento, chamado de *energia cinética*. Assim, escrevemos

$$E = m c^2 + \left[\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 \right] , \quad (30)$$

onde o primeiro termo é o de repouso e o segundo, o cinético. Esta decomposição é bastante deslegante e, talvez por isso, pouco empregada.

- **inércia:** A noção de *inércia* foi introduzida por Newton, sempre associada ao momento $\mathbf{p}$, expresso pela eq.(1). Segundo ela, momento é o produto da inércia pela velocidade, sendo a inércia associada à massa. Na relatividade, temos aeq.(16), que representa o produto de γm pela velocidade. Isto sugere que, neste novo contexto, a inércia da partícula é representada por γm . Isto parece ser apenas a troca de um problema por outro, pois não temos intuição acerca do significado físico de γm . Entretanto, as coisas melhoram muito se usarmos a eq.(17) para reescrever a eq.(16) como

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u} , \quad (31)$$

pois agora temos intuição física acerca da energia.

Nesta forma fica claro que, *na relatividade, a inércia de um corpo está associada à sua energia* e, não, à sua massa.

No eletromagnetismo, ondas eletromagnéticas têm inércia, pois podem se propagar no vácuo em linha reta, com velocidade constante. Além disso, elas carregam energia, associada aos seus campos elétrico e magnético e, também podem empurrar objetos sobre os quais incidem, indicando que elas possuem momento. Entretanto, elas não têm massa. Por isso, a forma (32) é totalmente compatível com o modo de pensar o mundo do eletromagnetismo.

No caso de fótons, os quanta de luz, com $m = 0$, a eq.(27) passa a ser escrita como

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2; , \quad (32)$$

e a eq.(31), com $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{c}$, permanece inalterada:

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{c} , \quad (33)$$

indicando que o momento do fóton é dado pela sua energia.

Olhando a expressão newtoniana do momento a partir de uma perspectiva relativística, podemos pensar que, para um corpo massivo com velocidades baixas, $E \rightarrow m c^2$ e, por isso, $\mathbf{p} = (E/c^2) \mathbf{u} \rightarrow m \mathbf{u}$. Na física newtoniana, esta correspondência perde completamente o sentido para corpos sem massa.

- **massa inercial e massa de repouso - uma falsa dicotomia:**

II. REAÇÕES

Partículas elementares e núcleos atômicos são muito pequenos e é comum que eles tenham velocidades altas, comparáveis à da luz. A enorme maioria das medidas em física de partículas e física nuclear é feita através de reações de espalhamento, nas quais um desses objetos é atirado sobre outro. Do ponto de vista experimental, dois referenciais são muito importantes, conhecidos como *referencial de centro de massa* e *referencial de laboratório*.

- **referencial de laboratório:** O referencial de laboratório (LAB) é aquele no qual um dos objetos iniciais, conhecidos como *alvo*, está em repouso, e o outro incide sobre ele.
- **referencial de centro de massa:** O referencial de centro de massa (CM) é, por definição, aquele no qual a soma dos vários *momentos* é nula. Existam experimentos feitos diretamente no CM, tal como aquele no qual o bóson de Higgs foi detectado. Entretanto, mesmo quando isto não acontece, o CM continua sendo importante, pois nele a descrição de uma reação é a mais simples possível. Em outras palavras, nele é mais fácil pensar.

Por isso, em muitos problemas, é necessário relacionar momentos e energias de sistemas em referenciais diferentes, especialmente entre os sistemas do LAB e do CM.

A. choque elástico

O choque de dois objetos é chamado de *elástico* se eles as suas identidades são mantidas. Por exemplo um elétron (e) é atirado sobre um próton (p), ocorre uma interação eletromagnética entre eles, ambos são desviados, mas as partículas finais continuam a ser um elétron e um próton. De modo compacto esta reação é representada por $ep \rightarrow ep$. Uma versão inelástica, possível com as mesmas partículas iniciais, é $ep \rightarrow \nu n$, onde ν e n correspondem a um neutrino e um nêutron.

Nós consideramos aqui a reação genérica $ab \rightarrow ab$, que envolve dois referenciais, CM e LAB, e quatro quadrimomentos em cada referencial. Por isso, é preciso tomar um pouco de cuidado para que a notação não fique muito pesada.

- **notação:** No CM, usamos e para as energias e $\mathbf{q}$ para os tri-momentos, enquanto que, no LAB, usamos respectivamente E e $\mathbf{p}$. Em ambos os casos, estados finais são representados por símbolos com *linha*.

- **centro de massa:** O fato de estarmos no CM permite-nos escrever $\mathbf{q}_a = -\mathbf{q}_b \equiv \mathbf{q}$ e $q'_a = -q'_b \equiv \mathbf{q}'$ e os momentos iniciais e finais dos dois objetos são

$$q_a : (e_a/c, \mathbf{q}), \quad \rightarrow \quad e_a = \sqrt{\mathbf{q}^2 c^2 + m_a^2 c^4}, \quad (34)$$

$$q_b : (e_b/c, -\mathbf{q}) , \rightarrow e_b = \sqrt{\mathbf{q}^2 c^2 + m_b^2 c^4} , \quad (35)$$

$$q'_a : (e'_a/c, \mathbf{q}') , \rightarrow e'_a = \sqrt{\mathbf{q}'^2 c^2 + m_a^2 c^4} , \quad (36)$$

$$q'_b : (e'_b/c, -\mathbf{q}') , \rightarrow e'_b = \sqrt{\mathbf{q}'^2 c^2 + m_b^2 c^4} . \quad (37)$$

Neste problema, supomos conhecidos a energia inicial e_a do objeto a e o ângulo de espalhamento θ , entre as direções de $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$.

• **choque elástico no CM** $\rightarrow e'_a = e_a, e'_b = e_b$ e $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'|$: Em seguida, demonstramos estes resultados. O fato de os tri-momentos serem os mesmos nos pares de eqs.(34-35) e (36-37) permite-nos escrever

$$e_a^2 - e_b^2 = (m_a^2 - m_b^2) c^4 , \quad (38)$$

$$e_a'^2 - e_b'^2 = (m_a^2 - m_b^2) c^4 . \quad (39)$$

Juntando estes resultados com a conservação da energia,

$$(e_a + e_b) = (e'_a + e'_b) , \quad (40)$$

temos

$$\begin{aligned} e_a^2 - e_b^2 &= e_a'^2 - e_b'^2 \\ \rightarrow (e_a - e_b)(e_a + e_b) &= (e'_a - e'_b)(e'_a + e'_b) \\ \rightarrow (e_a - e_b) &= (e'_a - e'_b) . \end{aligned} \quad (41)$$

Somando e subtraindo as eqs.(40) e (41), obtemos $e_a = e'_a$ e $e_b = e'_b$. A partir destes resultados, concluímos que $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'|$.

Assim, para o espalhamento elástico no CM, as energias de cada partícula não se alteram e os tri-momentos apenas mudam de direção.

Se chamarmos de w a energia total do sistema no CM, podemos usar os resultados anteriores para escrever

$$e_a - e_b = \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} , \quad (42)$$

$$e_a + e_b = w , \quad (43)$$

e, portanto,

$$e'_a = e_a = \frac{1}{2} \left[w + \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} \right] , \quad (44)$$

$$e'_b = e_b = \frac{1}{2} \left[w - \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} \right] . \quad (45)$$

Para os módulos dos tri-momentos, temos

$$|\mathbf{q}'| = |\mathbf{q}| = \frac{1}{2c} \sqrt{w^2 - 2(m_a^2 + m_b^2)c^4 + \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2 c^8}{w^2}} \quad (46)$$

• **mudando do CM para o LAB - transformações de Lorentz:** Para usar as TL é conveniente adotarmos um sistema de eixos. Escolhemos o eixo y paralelo a $\mathbf{q}$ e supomos que o espalhamento ocorra no plano yz .

As TL são implementadas pela matrizes Λ e, para irmos do CM para o LAB, precisamos efetuar uma transformação ao longo do eixo y , dada genericamente por

$$\begin{bmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e/c \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad (47)$$

ou, em termos de componentes,

$$(E/c; p_x, p_y, p_z) = (\gamma[e - v q_y]/c, q_x; \gamma[q_y - v e/c^2], q_z) \quad (48)$$

Para determinar completamente a transformação, é preciso especificar a velocidade v . Por isso, consideramos inicialmente o caso do momento inicial da partícula b , pois ela corresponde ao alvo no LAB e, portanto, $p_b = (m_b c, 0)$. Neste caso, usando $q_b = (e_b/c; 0, -|\mathbf{q}|, 0)$, escrevemos a eq.(43) como

$$p_b = (m_b c; 0, 0, 0) = (\gamma[e_b + v |\mathbf{q}|]/c; 0, \gamma[-|\mathbf{q}| - v e_b/c^2], 0) . \quad (49)$$

A condição $p_{by} = 0$ fornece

$$v = -\frac{|\mathbf{q}| c^2}{e_b} , \quad (50)$$

e, portanto,

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - [|\mathbf{q}| c/e_b]^2}} = \frac{e_b}{m_b c} . \quad (51)$$

Estes resultados, que calibram o problema, são consistentes com os valores da componente 0 da eq.(48).

Para os demais momentos, temos

$$\begin{aligned} p_a &= (E_a/c; p_{ax}, p_{ay}, p_{az},) \\ &= \left(\frac{[e_a e_b + |\mathbf{q}|^2 c^2]}{m_b c^3}; 0, \frac{|\mathbf{q}| [e_a + e_b]}{m_b c^2}, 0 \right) , \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
p'_a &= (E'_a/c; p'_{ax}, p'_{ay}, p'_{az},) \\
&= \left(\frac{[e_a e_b + |\mathbf{q}|^2 c^2 \cos \theta]}{m_b c^3}, 0, \frac{|\mathbf{q}| [e_a + e_b \cos \theta]}{m_b c^2}, |\mathbf{q}| \sin \theta \right), \tag{53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_b &= (E'_b/c; p'_{bx}, p'_{by}, p'_{bz},) \\
&= \left(\frac{[e_b^2 - |\mathbf{q}|^2 c^2 \cos \theta]}{m_b c^3}, 0, \frac{|\mathbf{q}| e_b [1 - \cos \theta]}{m_b c^2}, -|\mathbf{q}| \sin \theta \right). \tag{54}
\end{aligned}$$

• **conservação do quadri-momento:** A partir das eqs.(49) e (52-54), podemos mostrar explicitamente que $p_a + p_b = p'_a + p'_b$, ou seja, que o quadrimomento no LAB é conservado. Este resultado é importante porque mostra que, para que isto aconteça, é essencial que o momento se transforme como um quadri-vetor relativístico.

• **energia e momento:** Reescreva os quadrimomentos no LAB, dados pelas eqs.(49) e (52-54), em termos da variável w , usando as eqs.(44-46). Em seguida, mostre que as condições $p_a^2 = p_a'^2 = m_a^2 c^2$ e $p_b^2 = p_b'^2 = m_b^2 c^2$ são satisfeitas.

• **ângulo de espalhamento:** No LAB, o ângulo de espalhamento Θ é determinado por

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}'_a}{|\mathbf{p}_a| |\mathbf{p}'_a|}. \tag{55}$$

Usando as eqs.(52) e (53), encontramos

$$\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{m_b c \sin \theta}{e_a + e_b \cos \theta} \right]^2}}. \tag{56}$$

• **invariantes:** Os produtos escalares de quaisquer dois quadrimomentos deste problema são invariantes. Ou seja, relações do tipo $q_\mu q^\mu = p_\mu p^\mu$ são válidas para quaisquer dois vetores do CM e do LAB.

Em alguns casos, esta invariância pode ser usada para obter informações no LAB, a partir do CM. Como p_b no LAB, eq.(49), é muito simples, podemos escrever

$$q_{b\mu} q_a^\mu = p_{b\mu} p_a^\mu \rightarrow \frac{e_a e_b}{c^2} + |\mathbf{q}|^2 = (m_b c) \frac{E_a}{c} \tag{57}$$

$$q_{b\mu} q_a'^\mu = p_{b\mu} p_a'^\mu \rightarrow \frac{e_a e_b}{c^2} + |\mathbf{q}|^2 \cos \theta = (m_b c) \frac{E'_a}{c} \tag{58}$$

$$q_{b\mu} q_b'^\mu = p_{b\mu} p_b'^\mu \rightarrow \frac{e_b^2}{c^2} - |\mathbf{q}|^2 \cos \theta = (m_b c) \frac{E'_b}{c} \tag{59}$$

A partir destes resultados, encontramos novamente as energias determinadas pelas eq.(52-54).

De modo geral, a invariância do produto escalar é muito útil para verificar a consistência de resultados obtidos por outros métodos.

B. choques inelásticos

Um choque de duas partículas ou núcleos é chamado de *inelástico* se elas as suas identidades mudam durante a reação. Como exemplos, podemos citar a aniquilação elétron-pósitron em dois fótons, representada por $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$ e a quebra de um dêuteron por um fóton, $\gamma d \rightarrow pn$. Em ambos os casos, há conservação de energia e momento. Entretanto, *não* há conservação da massa, ou seja, a lei de Lavoisier, da química, não vale. Este é um resultado muito importante, introduzido na física pela relatividade. Apesar disso, as massas das partículas envolvidas ainda desempenham papéis muito importantes no problema. No processo $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$, a soma das massas do estado inicial é maior do que a soma das massas do estado final, enquanto que o oposto ocorre nas reações $\gamma d \rightarrow pn$ e $e^- e^+ \rightarrow p \bar{p}$, onde $\bar{p}$ indica um anti-próton. Isto torna um processo um pouco diferente do outro, como discutimos nesta seção.

Na seção anterior, vimos que os resultados do CM e do LAB estão relacionados por uma transformação de Lorentz adequada. Como isto vale para qualquer reação, nesta seção nos restringimos ao CM, onde as descrições são mais simples.

Nós consideramos a reação genérica $ab \rightarrow cd$, que envolve quatro quadrimomentos. Por estarmos no CM, podemos escrever $\mathbf{q}_a = -\mathbf{q}_b \equiv \mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'_c = -\mathbf{q}'_d \equiv \mathbf{q}'$ e os quadri-momentos adquirem as formas

$$q_a : (e_a/c, \mathbf{q}), \quad \rightarrow \quad e_a = \sqrt{\mathbf{q}^2 c^2 + m_a^2 c^4}, \quad (60)$$

$$q_b : (e_b/c, -\mathbf{q}), \quad \rightarrow \quad e_b = \sqrt{\mathbf{q}^2 c^2 + m_b^2 c^4}, \quad (61)$$

$$q'_c : (e'_c/c, \mathbf{q}'), \quad \rightarrow \quad e'_c = \sqrt{\mathbf{q}'^2 c^2 + m_c^2 c^4}, \quad (62)$$

$$q'_d : (e'_d/c, -\mathbf{q}'), \quad \rightarrow \quad e'_d = \sqrt{\mathbf{q}'^2 c^2 + m_d^2 c^4}, \quad (63)$$

e a conservação do quadrimomento ou, equivalentemente, da energia e do momento, fica expressa por

$$q_a + q_b = q'_c + q'_d \quad (64)$$

Supomos conhecidos a energia inicial e_a do objeto a e o ângulo de espalhamento θ , entre as direções de $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$.

Analogamente ao caso elástico, chamamos de w a energia total do sistema e a conservação da energia permite escrever

$$w = (e_a + e_b) = (e'_c + e'_d). \quad (65)$$

Também, como os tri-momentos são os mesmos nos pares de eqs.(60-61) e (62-63), usamos (65) para escrever

$$e_a^2 - e_b^2 = (e_a - e_b) w = (m_a^2 - m_b^2) c^4 , \quad (66)$$

$$e_c'^2 - e_d'^2 = (e_c' - e_d') w = (m_c^2 - m_d^2) c^4 . \quad (67)$$

A partir destas expressões e da eq.(65), concluímos que

$$e_a = \frac{1}{2} \left[w + \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} \right] , \quad (68)$$

$$e_b = \frac{1}{2} \left[w - \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} \right] . \quad (69)$$

$$e_c' = \frac{1}{2} \left[w + \frac{(m_c^2 - m_d^2) c^4}{w} \right] , \quad (70)$$

$$e_d' = \frac{1}{2} \left[w - \frac{(m_c^2 - m_d^2) c^4}{w} \right] . \quad (71)$$

Os módulos dos tri-momentos são dados por

$$|\mathbf{q}| = \frac{1}{2c} \sqrt{w^2 - 2(m_a^2 + m_b^2) c^4 + \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2 c^8}{w^2}} , \quad (72)$$

$$|\mathbf{q}'| = \frac{1}{2c} \sqrt{w^2 - 2(m_c^2 + m_d^2) c^4 + \frac{(m_c^2 - m_d^2)^2 c^8}{w^2}} . \quad (73)$$

Estes resultados são importantes porque mostram que as energias e momento dos estados inicial e final são determinados pela energia total w e pelas respectivas massas.

• **exemplo 1:** $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$

O elétron e a sua anti-partícula, o *pósitron*, têm massas idênticas, representadas por m , enquanto que os fótons têm massa nula. Usando estes valores nas eqs.(68-71), encontramos

$$e_a = e_b = e_c' = e_d' = w/2 . \quad (74)$$

Ou seja, como as partículas iniciais são idênticas entre si, e o mesmo acontece com as finais, no CM, cada partícula tem metade da energia do sistema.

Já para os momentos, obtemos

$$|\mathbf{q}| = \frac{1}{2c} \sqrt{w^2 - 4m^2 c^4} , \quad (75)$$

$$|\mathbf{q}'| = \frac{w}{2c} . \quad (76)$$

Como $m \neq 0$, podemos concluir que $|\mathbf{q}'| > |\mathbf{q}|$. Para compreender esta relação , notamos que as eqs.(60-63), adaptadas a este exemplo, correspondem a

$$e_a = e_b = \sqrt{\mathbf{q}^2 c^2 + m^2 c^4} , \quad (77)$$

$$e_c' = e_d' = |\mathbf{q}| c . \quad (78)$$

Como todas estas energias são iguais, devemos ter $|\mathbf{q}'| > |\mathbf{q}|$.

• **exemplo 2:** $e^- e^+ \rightarrow p \bar{p}$

O anti-próton também tem massa idêntica à do próton. Esta massa, representada por M , é cerca de 2.000 vezes maior do que a do elétron. Por isso, neste exemplo, ao contrário do anterior, as massa iniciais são menores do que as finais.

Novamente, as eqs.(68-71) fornecem

$$e_a = e_b = e'_c = e'_d = w/2 \quad (79)$$

e cada partícula carrega metade da energia do sistema. Para os momentos, encontramos

$$|\mathbf{q}| = \frac{1}{2c} \sqrt{w^2 - 4 m^2 c^4}, \quad (80)$$

$$|\mathbf{q}'| = \frac{1}{2c} \sqrt{w^2 - 4 M^2 c^4}. \quad (81)$$

A condição $M > m$ faz com que tenhamos $|\mathbf{q}'| < |\mathbf{q}|$. Entretanto, neste tipo de problema, o valor de $|\mathbf{q}|$ não pode ser um número positivo qualquer. Para que a eq.(81) possa ter solução real é preciso que tenhamos $w \geq 2 M c^2$. Isso significa que para que a reação $e^- e^+ \rightarrow p \bar{p}$ possa ocorrer, o módulo do momento inicial deve ser

$$|\mathbf{q}| \geq \frac{1}{2c} \sqrt{4(M^2 - m^2) c^4}, \quad (82)$$

que corresponde a

$$e_a = e_b = \sqrt{\mathbf{q}^2 c^2 + m^2 c^4} \geq M c^2. \quad (83)$$

Na relatividade, duas partículas leves, como o e^- e o e^+ , podem gerar duas partículas mais pesadas, desde que elas tenham tri-momentos suficientemente altos. Estes tri-momentos contribuem à energia das partículas leves, através da eq.(83) e, quando eles atingem o valor mínimo determinado pela eq.(82), esta energia é suficiente para que as partículas pesadas possa ser produzidas. Para momentos menores que aquele valor crítico, a reação $e^- e^+ \rightarrow p \bar{p}$ não pode ocorrer. Assim, existe uma energia total mínima no CM para que a reação possa ocorrer, conhecida como *energia limiar (threshold)*, em inglês). Neste exemplo, a energia limiar para a reação $e^- e^+ \rightarrow p \bar{p}$ corresponde a $w_L = 2 M c^2$.

C. decaimentos

Decaimentos são processos nos quais uma partícula se transforma espontaneamente em outras duas ou três. Estas reações são muito comuns e indicadas por $a \rightarrow bc$ ou $a \rightarrow bcd$.

Como exemplo de decaimentos com dois corpos no estado final, podemos citar $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$, enquanto que no caso de três corpos temos $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, dentre muitas outras possibilidades.

Em ambos os tipos de decaimento, vale a conservação do quadrimomento, em qualquer referencial. Nós, aqui, consideramos apenas decaimentos em dois corpos, no CM. Como nos casos anteriores, a mudança para outros referenciais pode ser feita por meio de transformações de Lorentz adequadas. No CM, a partícula inicial a está em repouso e, usando o fato que os tri-momentos dos produtos do decaimento são iguais, escrevemos

$$q_a : (m_a c, 0) , \quad (84)$$

$$q'_b : (e'_b/c, \mathbf{q}') , \rightarrow e'_b = \sqrt{\mathbf{q}'^2 c^2 + m_b^2 c^4} , \quad (85)$$

$$q'_c : (e'_c/c, -\mathbf{q}') , \rightarrow e'_c = \sqrt{\mathbf{q}'^2 c^2 + m_c^2 c^4} . \quad (86)$$

A conservação do quadrimomento é expressa por

$$q_a = q'_b + q'_c \quad (87)$$

Para determinar os valores das grandezas no estado final, escrevemos

$$w = M_a c^2 = (e'_a + e'_b) . \quad (88)$$

e, também,

$$e_b'^2 - e_c'^2 = (e'_b - e'_c) M_a c^2 = (m_b^2 - m_c^2) c^4 . \quad (89)$$

A partir destes resultados, obtemos

$$e'_b = \frac{1}{2} \left[M_a + \frac{(m_b^2 - m_c^2)}{M_a} \right] c^2 , \quad (90)$$

$$e'_c = \frac{1}{2} \left[M_a - \frac{(m_b^2 - m_c^2)}{M_a} \right] c^2 , \quad (91)$$

$$|\mathbf{q}'| = \frac{c}{2} \sqrt{M_a^2 - 2(m_c^2 + m_b^2) + \frac{(m_c^2 - m_b^2)^2}{M_a^2}} . \quad (92)$$

Estes resultados mostram que as energias das partículas do estado final são determinadas pela massa da partícula que decaiu.

• **exemplo 1:** $\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell$, onde ℓ é um lépton, e ou μ .

A massa do neutrino ν_ℓ é praticamente nula. Chamando de M e m as massas do pión positivo (π^+) e do lépton, temos

$$e'_\ell = \frac{1}{2} \left[M + \frac{m^2}{M} \right] c^2 , \quad (93)$$

$$e'_\nu = \frac{1}{2} \left[M - \frac{m^2}{M} \right] c^2 , \quad (94)$$

$$|\mathbf{q}'| = \frac{c(M^2 - m^2)}{2M} . \quad (95)$$

As eqs.(94) e (95) correspondem a $e'_\nu = |\mathbf{q}'| c$, como se espera para uma partícula sem massa. Já as eqs.(93) e (95) permitem-nos calcular a velocidade do elétron, por

$$|\mathbf{u}_\ell| = \frac{|\mathbf{q}'| c^2}{e'_\ell} = \frac{(M^2 - m^2)}{(M^2 + m^2)} c \quad (96)$$

No caso $\ell = e$, a massa do elétron vale $m \sim M/280$ e, portanto, $|\mathbf{u}_e| \sim 0,99997 c$, indicando que o elétron é muito relativístico. Já no caso $\ell = \mu$, $m \sim 3M/4$, e $|\mathbf{u}_\mu| \sim 0,27 c$.

• **exemplo 2:** $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Chamando de M a massa do π^0 , a conservação da energia e do momento fornecem

$$w = M c^2 = e'_b + e'_c, \quad (97)$$

$$0 = \mathbf{q}'_b + \mathbf{q}'_c. \quad (98)$$

Assim,

$$e'_b = \frac{M c^2}{2}, \quad (99)$$

$$e'_c = \frac{M c^2}{2}, \quad (100)$$

$$|\mathbf{q}'_b| = |\mathbf{q}'_c| = \frac{M c}{2}. \quad (101)$$

Ou seja, a energia associada à massa do π^0 se reparte igualmente entre os dois fótons finais.

D. produção

Partículas novas podem ser produzidas na colisão de duas outras, desde que a energia seja suficientemente alta. Por exemplo, quando um π^- é atirado sobre um próton, podemos ter as reações $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$, $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^- p$, $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^- p$, $\dots$ A primeira delas corresponde a um choque elástico e as demais, a produções. Em casos extremos, como no LHC, centenas de partículas podem ser produzidas em uma colisão próton-próton.

Consideramos de modo genérico, a reação $ab \rightarrow abc$. A conservação do quadrimomento é válida em qualquer referencial e expressa por

$$q_a + q_b = q'_a + q'_b + q'_c. \quad (102)$$

Consideramos, agora, o caso do referencial do CM. Chamando de w a energia total do sistema, temos

$$w = e_a + e_b = e'_a + e'_b + e'_c. \quad (103)$$

No CM, os tri-momentos das partículas iniciais estão relacionados por $\mathbf{q}_a = -\mathbf{q}_b \equiv \mathbf{q}$. Para as partículas finais, entretanto, a conservação do trimomento é dada por

$$0 = \mathbf{q}'_a + \mathbf{q}'_b + \mathbf{q}'_c \quad (104)$$

e corresponde a um vínculo entre três grandezas. Por isso ela não permite que os módulos dos momentos finais sejam completamente determinados. Os quadri-momentos adquirem são escritos como

$$q_a : (e_a/c, \mathbf{q}), \rightarrow e_a = \sqrt{\mathbf{q}^2 c^2 + m_a^2 c^4}, \quad (105)$$

$$q_b : (e_b/c, -\mathbf{q}), \rightarrow e_b = \sqrt{\mathbf{q}^2 c^2 + m_b^2 c^4}, \quad (106)$$

$$q'_a : (e'_a/c, \mathbf{q}'_a), \rightarrow e'_a = \sqrt{\mathbf{q}'_a{}^2 c^2 + m_a^2 c^4}, \quad (107)$$

$$q'_b : (e'_b/c, \mathbf{q}'_b), \rightarrow e'_b = \sqrt{\mathbf{q}'_b{}^2 c^2 + m_b^2 c^4}, \quad (108)$$

$$q'_c : (e'_c/c, \mathbf{q}'_c), \rightarrow e'_c = \sqrt{\mathbf{q}'_c{}^2 c^2 + m_c^2 c^4}. \quad (109)$$

Como o estado inicial do sistema envolve apenas duas partículas, as manipulações efetuadas anteriormente permitem escrever A partir destas expressões e da eq.(65), concluímos que

$$e_a = \frac{1}{2} \left[w + \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} \right], \quad (110)$$

$$e_b = \frac{1}{2} \left[w - \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} \right]. \quad (111)$$

$$|\mathbf{q}| = \frac{1}{2c} \sqrt{w^2 - 2(m_a^2 + m_b^2) c^4 + \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2 c^8}{w^2}}. \quad (112)$$

O estudo do estado final desta reação é mais complicado do que os discutidos anteriormente, por envolver três partículas. Por isso, consideramos aqui apenas a situação particular do *limiar* da reação, que corresponde à situação em que a energia do estado final é a menor possível. Ela ocorre quando as três partículas finais estão em repouso. Neste caso, a eq.(103) passa a ser

$$w_L = e_a + e_b = (m_a + m_b + m_c) c. \quad (113)$$

Usando este valor de w_ℓ nas eqs.(110-112), encontramos as energias iniciais mínimas para que a produção possa ocorrer.

• **exemplo 1:** $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^- p$, **no limiar**

As massas do π^- e π^0 são aproximadamente iguais e são representadas por m , enquanto que a do pítón é M . Neste caso, $w_\ell = (M + 2m) c^2$ e as eqs.(110-112) fornecem

$$e_p = \frac{1}{2} \left[M + 2m + \frac{M^2 - m^2}{M + 2m} \right] c^2, \quad (114)$$

$$e_\pi = \frac{1}{2} \left[M + 2m - \frac{M^2 - m^2}{M + 2m} \right] c^2. \quad (115)$$

$$|\mathbf{q}| = \frac{c}{2} \sqrt{(M + 2m)^2 - 2(M^2 + m^2) + \frac{(M^2 - m^2)^2}{(M + 2m)^2}}. \quad (116)$$

Os valores experimentais das massas correspondem aproximadamente à relação $m = M/7$. Usando este valor, encontramos $e_p \sim 1,024 M c^2$, $e_\pi \sim 0,262 M c^2$ e $|\mathbf{q}| = 0,220 c$. Usando a expressão para a velocidade, $|\mathbf{u}| = |\mathbf{q}| c^2/e$, obtemos $|\mathbf{u}_p| \sim 0,214 c$ e $|\mathbf{u}_\pi| \sim 0,838 c$. Ou seja, o pión, por ser mais leve, é bastante mais relativístico do que o próton.

III. ESTADOS LIGADOS

Esta seção foi escrita em colaboração com F.B. Kneubil.

Na natureza, existem muitos processos nos quais dois corpos se juntam, formando um terceiro e liberando energia eletromagnética, na forma de calor ou luz. Tais processos são conhecidos como *reações exotérmicas*, sendo que o prefixo grego *exo* significa *para fora*.

De modo geral, uma reação exotérmica corresponde ao processo no qual um corpo A se junta a um corpo B, formando um novo corpo X e liberando energia eletromagnética. Na prática, esses corpos costumam ser elementos químicos ou partículas. Esse tipo de processo esquematicamente representado por $A + B = X + \gamma$, onde o γ corresponde ao fóton irradiado, portador da energia eletromagnética.

Esta processo corresponde a um caso particular de choques inelásticos, discutidos anteriormente. No CM, a conservação do quadrimomento permitem, usando as eqs.(68-73), escrever as energias e momentos das partículas como

$$e_a = \frac{1}{2} \left[w + \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} \right], \quad (117)$$

$$e_b = \frac{1}{2} \left[w - \frac{(m_a^2 - m_b^2) c^4}{w} \right]. \quad (118)$$

$$e'_x = \frac{1}{2} \left[w + \frac{M_x^2 c^4}{w} \right], \quad (119)$$

$$e'_\gamma = \frac{1}{2} \left[w - \frac{M_x^2 c^4}{w} \right], \quad (120)$$

$$|\mathbf{q}| = \frac{1}{2c} \sqrt{w^2 - 2(m_a^2 + m_b^2) c^4 + \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2 c^8}{w^2}}, \quad (121)$$

$$|\mathbf{q}'| = \frac{1}{2w c} [w^2 - M_x^2 c^4]. \quad (122)$$

Estes resultados incluem a relação $e'_\gamma = |\mathbf{q}'| c$, válida para uma partícula sem massa. A energia do fóton está relacionada à sua frequência ν por $E_\gamma = h \nu$, h é a constante de Planck, que vale $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s} = 4,14 \times 10^{-21} \text{ MeV s}$.

Mesmo no caso em que os corpos iniciais, A e B , estão em repouso, o corpo X e o

fóton carregam momento e saem em sentidos contrários. Neste caso, usando $w = w_{min} = (m_a + m_b) c^2$ nas eqs.(117-122), encontramos $e_a = m_a c^2$, $e_b = m_b c^2$, $|\mathbf{q}| = 0$ e, também,

$$e'_x = \frac{(m_a + m_b)^2 + M_x^2}{2(m_a + m_b)} c^2, \quad (123)$$

$$e'_\gamma = \frac{(m_a + m_b)^2 - M_x^2}{2(m_a + m_b)} c^2, \quad (124)$$

$$|\mathbf{q}'| = \frac{(m_a + m_b)^2 - M_x^2}{2(m_a + m_b)} c. \quad (125)$$

Como $M_x < (m_a + m_b)$, concluímos que $|\mathbf{q}'| > 0$.

A. energia de ligação - átomo de hidrogênio

O conceito de *energia de ligação* é muito importante e envolve algumas sutilezas. Por isso o discutimos, inicialmente, no contexto do átomo de hidrogênio.

- $H \neq e^- + p^+$:

Elétrons e prótons são entidades que somente podem ser plenamente definidas quando estão completamente isoladas. Um *sistema* formado por *um* elétron e *um* próton funciona sempre de modo integrado e não pode, em geral, ser desacoplado em dois subsistemas, um deles contendo apenas o elétron e o outro, o próton. Para compreender isto é interessante notar que o sistema elétron-próton contém, além dessas duas entidades, energia potencial e *energia cinética*. No caso da energia cinética T , podemos pensar que o seu valor total pode ser expresso como uma soma de contribuições individuais, oriundas do e e do p . Ou seja, podemos escrever $T = T_e + T_p$.

Por outro lado, a quem pertence a energia potencial? No caso eletrostático, a energia potencial do sistema é dada pela integral sobre todo o espaço da densidade

$$\frac{dU_E}{dV} = \frac{\epsilon_o}{2} (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p)^2 = \frac{\epsilon_o}{2} (\mathbf{E}_e^2 + \mathbf{E}_p^2 + 2 \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{E}_p). \quad (126)$$

O termo cruzado, proporcional a $\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{E}_p$, não pode ser associado apenas ao e ou ao p . Ele é fruto da *interação* e está espalhado por todo o espaço. Deste modo, a energia de interação constitui-se num terceiro componente do sistema, que inviabiliza a sua quebra em dois subsistemas isolados. Apenas para grandes distâncias, o desacoplamento pode ser efetivado e podemos falar em elétron e próton.

Um átomo de hidrogênio é ainda mais diferente de um sistema elétron-próton, pois ele é formado na reação exotérmica $e + p \rightarrow H + \gamma$. O fato de haver a emissão de um fóton indica que as distribuições das energias cinética e potencial no átomo de hidrogênio e no sistema elétron-próton anterior à reação são intrinsecamente diferentes.

- **energias:**

Deste modo, um átomo de hidrogênio é algo diferente de um elétron justaposto a um próton, ele é uma outra entidade. Ainda assim, para pensar no átomo, é costume pensar que a sua energia pode ser decomposta em quatro parcelas:

(energia do átomo)

$$\begin{aligned} &= (\text{energia associada à massa do próton}) + (\text{energia associada à massa do elétron}) \\ &+ (\text{energia cinética}) + (\text{energia potencial de interação}) \end{aligned}$$

No sistema de repouso do átomo, ele não tem energia cinética e a sua energia pode ser expressa como

$$M_H c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 + T + U . \quad (127)$$

Como $M_H < (m_p + m_e)$ e $T > 0$, a energia potencial U deve ser negativa. Além disso $T + U < 0$, o que é coerente com o fato de o elétron e o próton estarem ligados.

No caso do átomo de hidrogênio, a energia de ligação, geralmente representada pela letra B , de *binding*, em inglês, é dada por

$$B_H = (m_p + m_e - M_H) c^2 . \quad (128)$$

Essa grandeza é positiva e sua interpretação física é extraída diretamente da eq.(127), que permite escrever

$$B_H = |T + U| . \quad (129)$$

Ou seja, ela representa a parte da energia do hidrogênio associada às energias cinética e potencial dos seus constituintes. No caso do átomo no estado fundamental, $B = 13,6 \text{ eV}$. Essa energia de ligação pode ser medida experimentalmente.

B. energia de ligação - caso geral

No caso de um sistema ligado qualquer, a *energia de ligação* é definida como a diferença entre as massas dos reagentes iniciais e a do produto final, multiplicadas por c^2 . Por isso,

$$B_x = (m_a + m_b - M_x) c^2 . \quad (130)$$

Ela também indica os conteúdos de energia cinética e potencial do sistema e pode ser conhecida experimentalmente, através da medida das massas.

- **a energia de ligação e a energia do fóton emitido:**

A relação entre a energia de ligação de um sistema e a energia do fóton emitido na reação

exotérmica na qual ele é formado pode ser obtida eliminando M_x entre as eqs.(124) e (130). Assim, obtemos

$$e'_\gamma = \frac{2(m_a + m_b) B_x - B_x^2/c^2}{2(m_a + m_b)} c^2 . \quad (131)$$

Quando B_x for pequeno em comparação às massas das partículas iniciais multiplicadas por c^2 , $e'_\gamma \simeq B_x$.

• **questão:**

Do ponto de vista conceitual, porque a eq.(131) nos ensina que $e'_\gamma < B_x$?