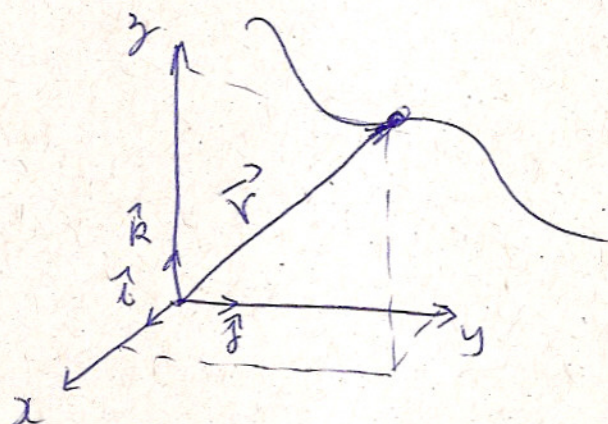


Cinemática Vetorial

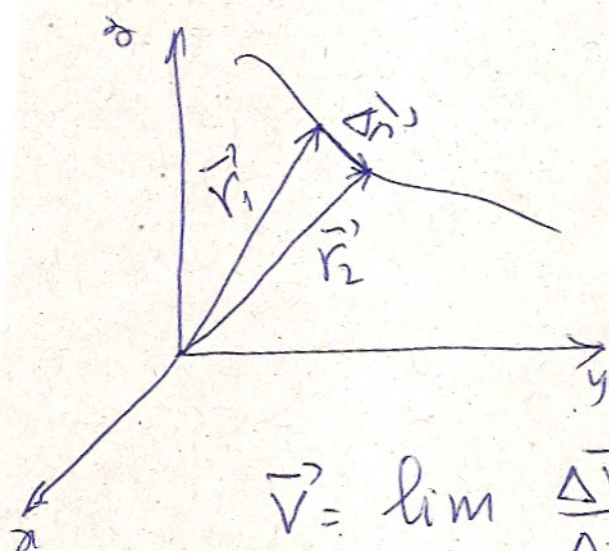
(1)

Vetor posição: Origem $\rightarrow$ na origem do sist. de ref.
extremidade $\rightarrow$ na posição da partícula



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Vetor Velocidade: na direção da velocidade da partícula



$\vec{r}_1$ = posição em t_1

$\vec{r}_2$ = posição em t_2

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

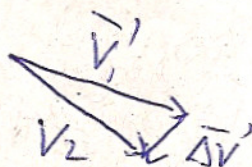
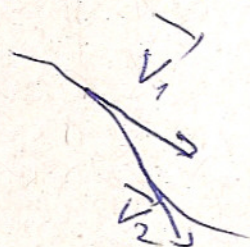
$$\vec{V}_{media} = \langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{Tangente à trajetória!})$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$\vec{V}_1$ = velocidade de partícula em $t = t_1$

$\vec{V}_2$ = " " " " " " $t = t_2$



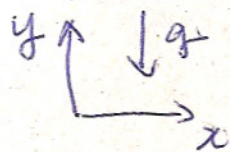
$$\vec{a}_{media} = \langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Movimento em 2.3D imensões

(2)

1) Lançamento de projéteis.



$$\vec{a} = -g\hat{j}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{V_x = V_{0x}}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow \boxed{V_y = V_{0y} - gt}$$

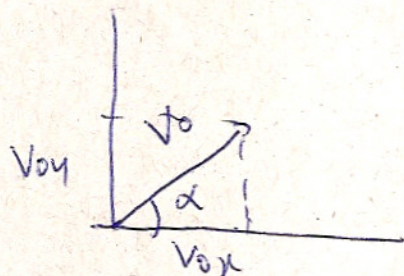
$$\frac{dx}{dt} = V_x = V_{0x} \Rightarrow \boxed{x = x_0 + V_{0x}t}$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = V_{0y} - gt \Rightarrow \boxed{y = y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2}$$

Eq. da trajetória: $(y(x))$

Pr simplicidade: $x_0 = y_0 = 0$

$$t = \frac{x}{V_{0x}} \quad y = \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{V_{0x}^2}x^2$$



$$V_{0x} = V_0 \cos \alpha$$
$$V_{0y} = V_0 \sin \alpha$$

$$y(x) = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (\text{parábola})$$

$$y(x) = b \cdot x - cx^2$$

Alcance: $y(0) \Rightarrow bx - cx^2 = 0$

$$x(b - cx) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x=0 \text{ (origem)} \\ x=b/c \text{ (alcance)} \end{array} \right\}$$

$$R = \frac{\tan \alpha}{\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

(3)

$$R = \frac{V_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Altura máxima: $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = b - 2cx = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{2c} = \frac{R}{2}$$

$$y\left(\frac{b}{2c}\right) = b \cdot \frac{b}{2c} - c \cdot \frac{b^2}{4c^2} = \frac{b^2}{2c} - \frac{b^2}{4c} = \frac{b^2}{4c}$$

$$y_{\max} = \frac{b^2}{4c} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} \frac{g}{V_0 \cos \alpha}} = \boxed{\frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}$$

$y_{\max}$ tb pode ser obtido como:

$$t_s = t \text{ p/ } V_y = 0 \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt$$

$$t_s = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\text{neste instante, } y = V_0 \sin \alpha \cdot \left(\frac{V_0 \sin \alpha}{g} \right) - \frac{1}{2} g \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{\max} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g}}$$

Resistência do ar (arrasto)

$$\vec{F}_a = -b\vec{v} \quad \text{p/ velocidades pequenas, } b = 6\pi\eta a \quad \text{estera}$$

onde η = coef. de viscosidade do ar e

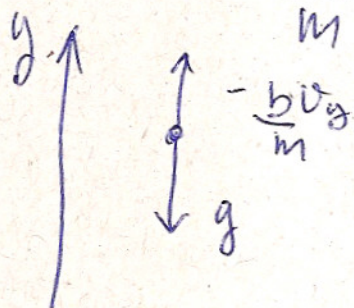
a = raio da esfera.

Queda vertical c/ resistência do ar (gota de chuva)

(4)

$F_a = -bv$ pr uma gota esférica, $b = 6\pi\eta a$
onde η = coef. viscosidade do ar
e a = raio da gota

$$a_a = -\frac{bv_y}{m}$$



$$a_y = -\frac{bv_y}{m} - g \quad (\text{como } v_y < 0, \quad -\frac{bv_y}{m} > 0, \text{ ou rep. oposta a } g)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{bv_y}{m} - g$$

$$\frac{dv_y}{-(g + \frac{bv_y}{m})} = dt \Rightarrow -\int_0^{v_y} \frac{dv_y}{g + \frac{bv_y}{m}} = \int_0^t dt$$

Sabendo que $\int \frac{dx}{a+x} = [\ln(a+x_2) - \ln(a+x_1)]$

$$\int_0^{v_y} \frac{dv_y}{g + \frac{bv_y}{m}} = \int_0^{v_y} \frac{dv_y}{\frac{b}{m}(\frac{mg}{b} + v_y)} = \frac{m}{b} \int_0^{v_y} \frac{dv_y}{\frac{mg}{b} + v_y}$$

$$= \frac{m}{b} \left[\ln\left(\frac{mg}{b} + v_y\right) - \ln\left(\frac{mg}{b}\right) \right]$$

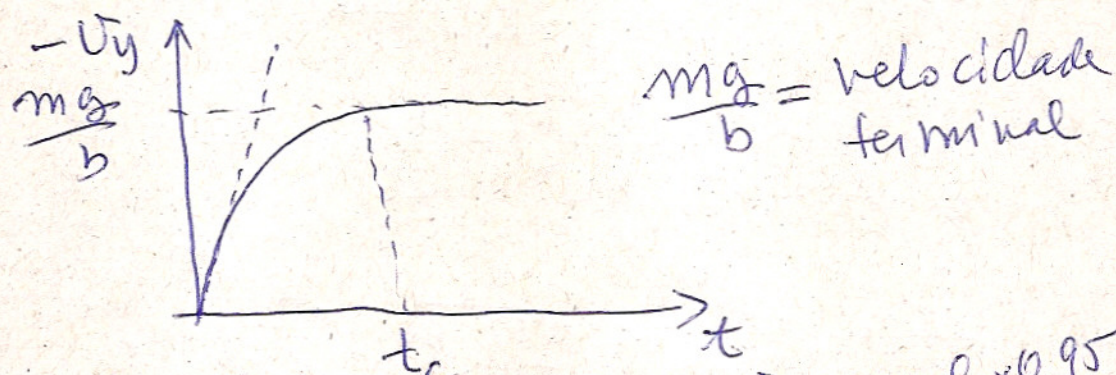
$$\Rightarrow -\frac{m}{b} \ln \frac{\frac{mg}{b} + v_y}{mg/b} = t$$

$$\ln \left(\frac{\frac{mg}{b} + v_y}{mg/b} \right) = -\frac{b}{m}t \Rightarrow \frac{mg}{b} + v_y = \frac{mg}{b} e^{-\frac{bt}{m}}$$

portanto

$$V_y(t) = \frac{mg}{b} \left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1 \right)$$

note que $V_y(0) = 0$ e $p/t > 0 \Rightarrow e^{-\frac{bt}{m}} < 1$
e portanto $V_y(t) \leq 0$ sempre!



$t_c = t_{\text{crítico}}$, quando $V_y \approx V_{\text{terminal}} \times 0,95$

Chamando $V_T = \frac{mg}{b}$ e $\beta = \frac{b}{m}$

$$V_y(t) = V_T (e^{-\beta t} - 1)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_T (e^{-\beta t} - 1)$$

$$\int dy = \int_0^t V_T (e^{-\beta t} - 1) dt$$

$$y - h = V_T \int_0^t e^{-\beta t} dt - V_T \int_0^t dt$$

$$y - h = -\frac{V_T}{\beta} (e^{-\beta t} - 1) - V_T t$$

$$y(t) = h - \frac{mg}{b} \cdot \frac{m}{b} \left(e^{-\frac{b}{m} t} - 1 \right) - \frac{mg}{b} t$$

$$y(t) = h - g \frac{m^2}{b^2} \left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1 \right) - \frac{mg}{b} t \quad (6)$$

no $\lim_{b \rightarrow 0}$ (i.e. sem atrito)

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$- \left[g \cdot \frac{m^2}{b^2} \left(1 - \frac{b}{m}t + \frac{1}{2} \frac{b^2}{m^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{b^3}{m^3} t^3 + \dots \right) + \frac{mg}{b} t \right]$$

$$= - \left[-g \cdot \frac{m}{b} t + \frac{1}{2} g t^2 + \cancel{m \cdot b t} + \dots + \cancel{\frac{mg}{b} t} \right] \quad \text{o quanto } b \rightarrow 0$$

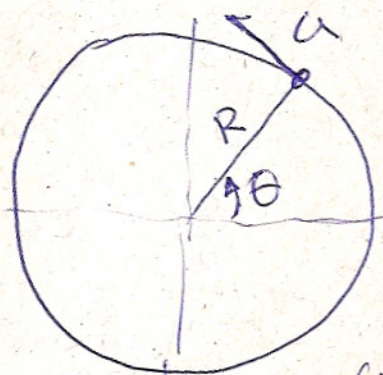
$$\Rightarrow y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$b \rightarrow 0$

gota de chuva $v_T \sim 7 \text{ m/s}$ (queda de $\sim 6 \text{ m}$)

bola de tênis $v_T \sim 31 \text{ m/s}$ (queda de 115 m)

Movimento Circular.



ω = velocidade angular

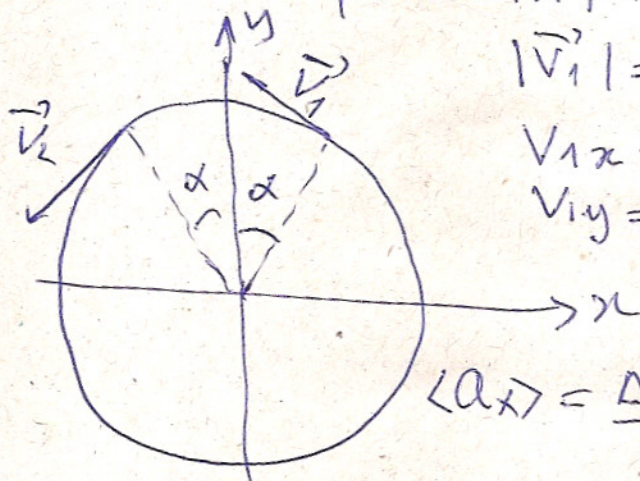
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = \omega R$$

(θ cresce no sentido anti-horário)
 $\uparrow$
 convenção

$\Rightarrow \omega > 0$ = rotação anti-horária

M.C.U. - Aceleração centrípeta:



$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$$

$$v_{1x} = v \cos \alpha \quad v_{2x} = v \cos \alpha$$

$$v_{1y} = v \sin \alpha \quad v_{2y} = -v \sin \alpha$$

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = 0 \Rightarrow a_x = 0$$

$$\langle a_y \rangle = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = - \frac{2 v \sin \alpha}{\Delta t} \quad \omega \Delta t = \Delta \theta = 2\alpha$$

$$\Delta t = \frac{v}{R} \Delta t = \frac{2\alpha}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\alpha R}{v}$$

$$\langle a_y \rangle = - \frac{v \sin \alpha}{\frac{\alpha R}{v}} = \frac{v^2}{R} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

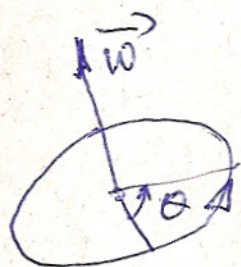
$$a_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle a_y \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle a_y \rangle = \frac{v^2}{R} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\Rightarrow a_y = a_c = \frac{v^2}{R} \quad \left(\begin{array}{l} \text{qdo } \alpha = 0 \text{ } v_y \text{ está na direção} \\ \text{radial !!} \end{array} \right)$$

Representação vetorial das rotações

(8)

(viremos com mais detalhes com momento angular, torque, etc)

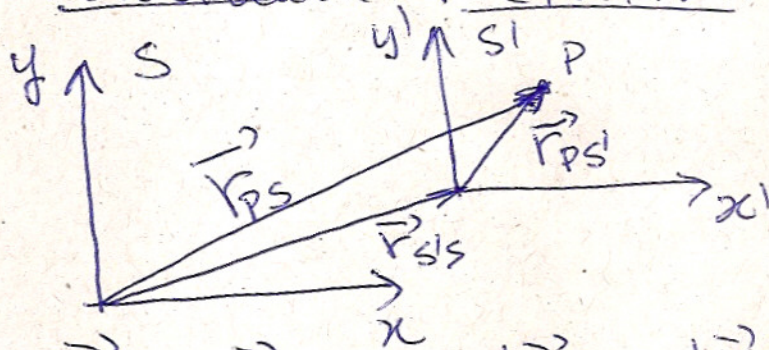


$\vec{\omega}$: tem a direção do eixo de rotação
sentido: regra da mão direita - rotação anti-horária = positiva.

$\vec{\theta}$ não é um vetor!! (não obedece às propriedades básicas dos vetores)

Entretanto, pode-se verificar que rotações infinitesimais ($d\vec{\theta}$ tem propriedades vetoriais. Portanto $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ é ~~um~~ tb um vetor!)

Velocidade Relativa



$$\vec{r}_{PS} = \vec{r}_{PS'} + \vec{r}_{S'S} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_{PS}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PS'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{S'S}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{V}_{PS} = \vec{V}_{PS'} + \vec{V}_{S'S}}$$

$V_{S'S} = \text{constante}$
(referenciais inerciais)

$$\frac{d\vec{V}_{PS}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{PS'}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{S'S}}{dt} \Rightarrow \vec{a}_{PS} = \vec{a}_{PS'}$$