UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Disciplina: 4300375 - 1o Semestre – 2016

Professor: Roberto V. Ribas

Período: Noturno

CRÉDITO TRABALHO: GPS E A TEORIA DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN

Anthony Cordeiro n.º USP 7580101

Gisele Balestra n.º USP 7240985

Guilherme Junqueira n.º USP 7158920

Veronica Soares n.º USP 7580585

GPS E A TEORIA DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN.

Objetivos

Promover aos alunos maior esclarecimento de processos tecnológicos, históricos, aliado com as competências que o PCN+ defende, com foco para o fazer da física nos seguintes conceitos:

1- Relatividade Restrita (1905) x Relatividade Geral (1915) – Explicitar que as teorias são diferentes

2- Postulados da Relatividade restrita

3- Efeitos da Relatividade: Contração do espaço e dilatação do tempo.

4- Funcionamento de um equipamento de GPS.

5- O GPS se não houvesse a relatividade.

Tempo Estimado

1 aula.

Público Alvo

1º ano do ensino médio.

Justificativa detalhada do tema

O ensino de física vem se adaptando a uma também adaptação feita na grade curricular a fim de mitigar um ensino de física descontextualizado e distante do dia-a-dia dos alunos.

Deparamo-nos hoje com aulas de física composta por resolução de exercícios, fórmulas e mais fórmulas e alguns conceitos difundidos com o objetivo de cumprir o currículo. Notamos também alunos desinteressados, pouco participativos e longe de absorver o que está sendo explicado.

Algumas das causas deste cenário são: professores atribulados de aulas, mal remunerados, com uma formação técnica (engenheiros, matemáticos) ou ainda com uma formação defasada, desatualizada. Alunos, por sua vez, sem interesse, acreditando que a física é para poucos e para gênios, cheia de fórmulas e conceitos que eles não vão usar nunca.

Diante dessa situação e de um currículo onde hoje a física moderna é um dos temas a serem abordados nos propusemos a explicar sobre o GPS, a fim de tornar a física mais próxima do dia-a-dia dos alunos, exemplificando-a com instrumentos atuais e de conhecimento do nosso público, alunos do ensino médio.

Abordar esse tema, GPS, que é utilizado não somente por muitos motoristas, mas também em aviões, navios, satélites proporcionam a dimensão e a importância de se aprender física para se tornar um cidadão crítico e os conteúdos e temas abordados serem absorvidos e aprendidos de forma significativa.

Metodologia

A aula está sendo pensada em momentos pedagógicos diferentes que abordam a problematização do tema, a organização dos conhecimentos, e finalmente sua aplicação. Contudo, consideramos que uma revisão de conceitos sobre a Teoria da gravitação de Newton e das equações cinemáticas faz-se necessário para atingirmos nossos objetivos.

A fim de tornar a prática pedagógica menos monótona e desinteressante, utilizaremos além do método tradicional alguns recursos audiovisuais (como vídeos e slides) bem como material de apoio desenvolvido pelo grupo com uma linguagem voltada para os alunos do 3º ano, buscando despertar o interesse e promover a motivação através da utilização da física nos avanços tecnológicos ocorridos nas duas últimas décadas.

Desenvolvimento

A determinação precisa da posição é importante para inúmeras atividades, como o transporte rodoviário de cargas e a navegação marítima. Foi no ano de 1978 que o departamento de defesa dos Estados Unidos da América montou o Sistema de Posicionamento Global, mais conhecido por nós como GPS. Esse sistema de posicionamento faz uso de satélites para ajudar na determinação da posição. Para isso, colocou-se em órbita três satélites.

Os satélites colocados na órbita da Terra emitem sinais com padrões conhecidos que podem ser recebidos em qualquer ponto da Terra, seja no mar ou no ar, por receptores do tamanho de uma calculadora. Esse é o sistema de posicionamento que dá a maior precisão na atualidade.

O princípio básico do funcionamento do GPS é usar a posição dos satélites para determinar a localização de um objeto na Terra por meio de triangulação. Quando o receptor capta o sinal de um satélite, pode determinar exatamente sua distância. Isso se faz da seguinte maneira:

O receptor sincroniza seu sinal interno como sinal enviado pelo satélite, determinando assim o intervalo de tempo (Δt) entre o instante em que o sinal foi enviado e o instante em que foi recebido.

Como sabemos que a velocidade de transmissão de dados é igual à própria velocidade da luz (v = 2,998 x 108 m/s), o receptor calcula a distância (ΔS) de separação entre o satélite e o objeto por meio da seguinte equação:

$$s=s0+v.t$$

$$\Delta s=v.t$$

Suponha que o intervalo de tempo medido entre o GPS e um objeto seja de 0,065 s. Assim, qual seria a distância entre o GPS e o objeto? Basta fazer uso da equação acima para determinar a distância entre eles. Dessa forma:

$$\Delta s=2,998 \times 10^8 x0,065$$

$$\Delta s=19.487 \text{ km}$$

Os satélites possuem a bordo relógios atômicos, que são mais precisos. Entretanto, para determinar a posição por meio de triangulação, é necessário que se conheça mais duas distâncias, que podem ser determinadas a partir de outros dois satélites. Hoje podemos ver que o GPS se tornou um acessório bastante utilizado por pessoas comuns, não mais tendo apenas a finalidade de uso militar.

Por fim falar qualitativamente tentando simplificar as contas da relatividade restrita, mas lembrando de que o intuito é apenas mostrar do que se trata, pois há a necessidade de uma ferramenta matemática e de um amadurecimento acadêmico ainda não adquirido por alunos dessa faixa etária.

Usaremos como base para a aula o trabalho de José Natário: “O GPS e a Teoria da Relatividade”

Requisitos necessários

Os alunos deveram ter conhecimento prévio da Teoria da gravitação de Newton e com as equações e conceitos cinemáticos.

Avaliação

Como nos propomos desde o início do projeto a fazer essa aula como um apêndice, tentando estimular o interesse do estudante pela física, não avaliaríamos os mesmo com uma prova ou exercício extraclasse. Seria apenas um bate papo ao fim da aula, para suprir algumas dúvidas que ficaram e fixar os conceitos aprendidos.

O GPS E A TEORIA DA RELATIVIDADE

JOSÉ NATÁRIO

1. Introdução

Dos muitos milagres tecnológicos de que dispomos no século XXI, e que teriam sem dúvida parecido magia a gerações passadas, existe um que mudou completamente a forma como nos orientamos à superfície do planeta Terra: o Sistema de Posicionamento Global, ou GPS na sigla inglesa (de *Global Positioning System*). O seu aparecimento alterou a forma como se navega, como se conduzem guerras, e até os mapas (que se julgavam rigorosos) de cidades tão cartografadas nos últimos séculos como Paris ou Nova Iorque. O seu funcionamento é quase uma epítome da ciência e engenharia modernas: baseia-se num sistema de satélites (engenharia aeroespacial) que emitem sinais de rádio (engenharia de telecomunicações), cujo tempo de propagação é medido por relógios atómicos (Mecânica Quântica) tão precisos que requerem correcções devidas à dilatação do tempo (Teoria da Relatividade), sendo o cálculo da posição realizado em tempo real por um aparelho que cabe na palma da mão (engenharia de computadores).

Por detrás disto tudo está, claro, a Matemática. Neste capítulo explicaremos o funcionamento geral do GPS, e a Matemática, muito simples, da determinação da posição do receptor a partir dos sinais dos satélites. Depois analisaremos duas das correcções mais interessantes que é necessário aplicar no cálculo da posição correcta: as correcções devidas à dilatação do tempo para relógios em movimento (que é uma consequência simples da invariância da velocidade da luz e do Teorema de Pitágoras) e para relógios num campo gravitacional. Este exemplo ilustra não só o papel central desempenhado pela Matemática na compreensão do mundo natural, mas também a importância da ciência fundamental: assuntos cujo interesse inicial é meramente teórico acabam por, mais tarde ou mais cedo, encontrar aplicações práticas relevantes, e em geral imprevisíveis.

2. GPS

Hoje em dia, o uso do Sistema de Posicionamento Global é generalizado. Por menos de 100 euros, é possível adquirir um receptor de GPS (Figura 1), capaz de indicar a sua posição exacta em qualquer ponto da superfície da Terra. Muitos objectos de uso corrente, desde telemóveis a automóveis, vêm já equipados com estes aparelhos. Além das aplicações civis e militares óbvias, da aviação à cartografia, o GPS tem aplicações científicas importantes, como por exemplo a medição do movimento de falhas geológicas durante tremores de terra; deu ainda origem a actividades recreativas completamente novas, como o popular jogo *geocaching*.

Figura 1. Receptor de GPS (fonte: TomTom).

2.1. **Ideia básica.** A ideia básica do GPS é muito simples: existe uma frota ("constelação" na terminologia do GPS) de satélites em órbita ao redor da Terra, que conhecem as suas órbitas com enorme exactidão, e transportam a bordo relógios atómicos muito precisos (Figura 2). Periodicamente, um sinal de rádio é emitido por cada satélite, no qual este indica a hora exacta que marca o seu relógio, bem como a sua posição nesse preciso instante.

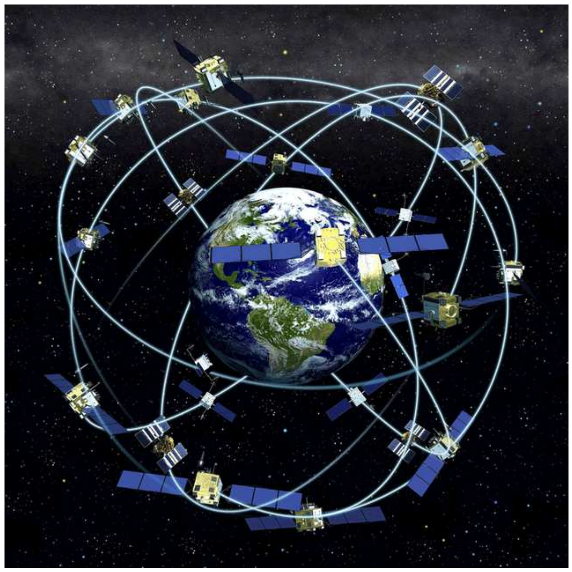

FIGURA 2. Constelação de satélites do GPS (fonte: NASA).

Suponhamos que num dado instante t o receptor de GPS recebe sinais de três satélites. O sinal do primeiro satélite indica que este se encontrava na posição (x_1, y_1, z_1) no instante t_1. Se c for a velocidade da luz, o sinal de rádio terá viajado uma distância $c(t - t_1)$. Deste modo, o receptor sabe que a sua posição (x, y, z) se encontra na superfície esférica de raio $c(t - t_1)$ centrada no ponto (x_1, y_1, z_1), ou seja, é uma solução da equação

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2.$$

Da mesma forma, se o segundo satélite comunica que se encontrava na posição (x_2, y_2, z_2) no instante t_2, o receptor conclui que se encontra algures na superfície esférica de equação

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2.$$

Estas duas superfícies esféricas intersectam-se numa circunferência[1]. De facto, subtraindo as equações obtemos

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z = I_{12},$$

onde

$$I_{12} = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 - c^2(t - t_1)^2 - {x_2}^2 - {y_2}^2 - {z_2}^2 + c^2(t - t_2)^2.$$

Esta equação é a equação de um plano, que intersecta as duas superfícies esféricas numa circunferência comum. Finalmente, se o terceiro satélite indica que se encontrava no ponto (x_3, y_3, z_3) no instante t_3, o receptor sabe que está algures na superfície esférica de equação

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2,$$

ou, equivalentemente, no plano de equação

$$2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y + 2(z_1 - z_3)z = I_{13},$$

[1] Ignoramos o caso especial em que as superfícies esféricas se intersectam num único ponto, isto é, são tangentes; na prática, esta situação nunca ocorre.

com

$$I_{13} = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 - c^2(t-t_1)^2 - {x_3}^2 - {y_3}^2 - {z_3}^2 + c^2(t-t_3)^2.$$

É agora imediata a conclusão que as três superfícies esféricas se intersectam em dois pontos (Figura 3): de facto, os dois planos intersectam-se numa recta, que por sua vez intersecta a primeira superfície esférica em dois pontos. Matematicamente, o receptor resolve o sistema de três equações quadráticas

$$\begin{cases}(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t-t_1)^2\\(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = c^2(t-t_2)^2\\(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2 = c^2(t-t_3)^2\end{cases}$$

ou, equivalentemente, o sistema de uma equação quadrática e duas equações lineares

$$\begin{cases}(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t-t_1)^2\\2(x_1-x_2)x + 2(y_1-y_2)y + 2(z_1-z_2)z = I_{12}\\2(x_1-x_3)x + 2(y_1-y_3)y + 2(z_1-z_3)z = I_{13}\end{cases}$$

obtendo duas soluções possíveis para a sua posição. Em geral, apenas uma destas soluções se encontra sobre a superfície da Terra, e essa será a verdadeira posição. Alternativamente, o sinal de um quarto satélite pode ser utilizado para remover a ambiguidade.

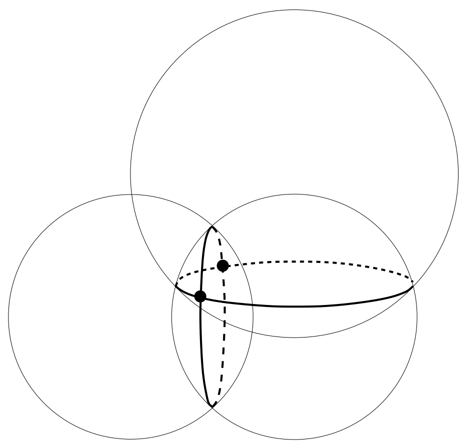

Figura 3. Intersecção de três superfícies esféricas.

2.2. **Corrigindo o tempo.** O mundo real é sempre mais complicado que as nossas idealizações. A ideia do funcionamento do receptor de GPS descrita anteriormente presume que o relógio do receptor é suficientemente preciso, mas na realidade os únicos relógios suficientemente precisos para uso no GPS são os relógios atómicos, cujo custo é de muitos milhares de euros. A razão da necessidade de tal precisão é simples de compreender: o GPS funciona medindo o tempo que os sinais de rádio demoram a viajar dos satélites até ao receptor. Os sinais de rádio viajam à velocidade da luz, 300.000 quilómetros por segundo, ou seja, cerca de 30 centímetros por nano-segundo (1 nano-segundo corresponde a 10^{-9} segundos). Assim, para que a medição da posição tenha uma precisão de 5 metros, por exemplo, é necessário que a medição do intervalo de tempo tenha uma precisão de 15 nano-segundos.

Felizmente, não é necessário pagar muitos milhares de euros por um receptor de GPS: basta que o receptor use os sinais de *quatro* satélites, e resolva o correspondente sistema de equações

$$\begin{cases}(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t-t_1)^2\\(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = c^2(t-t_2)^2\\(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2 = c^2(t-t_3)^2\\(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 + (z-z_4)^2 = c^2(t-t_4)^2\end{cases}$$

em ordem às variáveis (x, y, z, t). Desta forma, não só obtém uma posição (x, y, z) cuja precisão é determinada pela precisão dos relógios atómicos a bordo dos satélites, como pode ainda ele próprio ser utilizado como um relógio atómico muito preciso!

O sistema de equações quadráticas acima corresponde à intersecção de quatro hipersuperfícies cónicas em $\mathbb{R}^4$, e pode ser substituido pelo sistema de uma equação quadrática e três equações lineares

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t-t_1)^2 \\ 2(x_1-x_2)x + 2(y_1-y_2)y + 2(z_1-z_2)z - 2c^2(t_1-t_2)t = J_{12} \\ 2(x_1-x_3)x + 2(y_1-y_3)y + 2(z_1-z_3)z - 2c^2(t_1-t_3)t = J_{13} \\ 2(x_1-x_4)x + 2(y_1-y_4)y + 2(z_1-z_4)z - 2c^2(t_1-t_4)t = J_{14} \end{cases}$$

onde agora

$$J_{12} = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 - c^2{t_1}^2 - {x_2}^2 - {y_2}^2 - {z_2}^2 + c^2{t_2}^2,$$

e analogamente para J_{13} e J_{14}. O novo sistema corresponde à intersecção de uma hipersuperfície cónica e três hiperplanos. Os hiperplanos intersectam-se numa recta, que por sua vez intersecta a hipersuperfície cónica em dois pontos (Figura 4). O receptor obtém assim duas possibilidades para a sua posição, escolhendo então aquela que corresponde a um ponto da superfície da Terra. Alternativamente, o sinal de um quinto satélite pode ser utilizado para remover a ambiguidade.

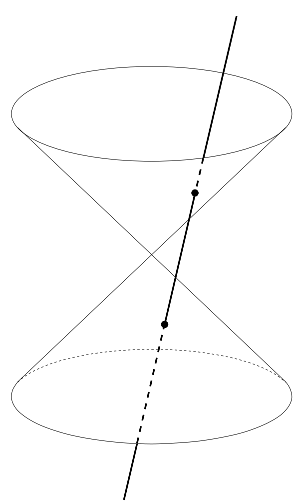

Figura 4. Intersecção de uma recta com uma superfície cónica.

Um detalhe técnico final é que (obviamente) os sinais dos satélites não são recebidos no mesmo instante exacto t. Suponhamos que o sinal do primeiro satélite é recebido quando o relógio do receptor marca t_1', sendo a hora exacta na verdade $t_1' + \delta$, onde δ é o desvio do relógio do receptor (de quartzo, portanto de baixa precisão) em relação aos relógios atómicos dos satélites. Assim, a equação correspondente ao sinal do primeiro satélite é na realidade

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t_1' + \delta - t_1)^2,$$

e o sistema de equações quadráticas que o receptor usa para determinar a sua posição é

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t_1' + \delta - t_1)^2 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = c^2(t_2' + \delta - t_2)^2 \\ (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2 = c^2(t_3' + \delta - t_3)^2 \\ (x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 + (z-z_4)^2 = c^2(t_4' + \delta - t_4)^2 \end{cases}$$

a resolver em ordem às variáveis (x, y, z, δ). O desvio δ do relógio do receptor em relação aos relógios atómicos vai variando ao longo do tempo, mas mantém-se suficientemente estável durante o cálculo para não afectar a precisão. Conhecendo este desvio, o receptor pode assim funcionar como um relógio de precisão idêntica à de um relógio atómico.

2.3. **Outras correcções.** Existem outras correcções que é necessário fazer no cálculo da posição do receptor de GPS. Parte delas prendem-se com o facto de que os sinais dos satélites se propagam na atmosfera, e portanto a sua velocidade não é exactamente a velocidade c da luz no vácuo. Para piorar as coisas, esta velocidade varia no espaço e no tempo, em função da ionização e da humidade das diversas camadas atmosféricas. Outras correcções tornam-se necessárias para eliminar os efeitos de reflexões dos sinais de GPS (em edifícios próximos, por exemplo), que podem ser confundidas com o verdadeiro sinal. Existem diversos métodos para implementar estas correcções, como usar duas frequências distintas no sinal de GPS, que reagem à ionização de maneira diferente, permitindo estimar o atraso devido a este fenómeno.

Existe ainda um terceiro tipo de correcções, mais interessantes, tornadas necessárias pela incrível precisão requerida na medição dos intervalos de tempo. Tal precisão leva-nos a ter que examinar a própria natureza do tempo, que foi profundamente reformulada por Einstein[2] na sua Teoria da Relatividade.

3. Relatividade

Em finais do século XIX tornou-se claro que a velocidade da luz era especial: cuidadosas experiências desenhadas para detectar variações na velocidade da luz devidas ao movimento anual da Terra em torno do Sol registavam resultados teimosamente nulos. A velocidade da luz parecia ser sempre a mesma, independentemente das velocidades da fonte e do observador. Isto é altamente contra-intuitivo, uma vez que um observador que se mova na mesma direcção que um raio de luz, por exemplo, vê esse raio de luz percorrer uma distância menor num dado intervalo de tempo, e portanto deveria obter uma velocidade menor.

Após um período de grande confusão, Einstein sugeriu, em 1905, uma solução tão simples quanto engenhosa: a única forma de observadores diferentes obterem o mesmo valor para a velocidade da luz seria medirem intervalos de tempo diferentes entre os mesmos acontecimentos. Esta explicação, que veio a ser conhecida como a Teoria da Relatividade Restrita, revelou-se correcta: relógios em movimento (num referencial inercial) atrasam-se em relação a relógios parados.

Figura 5. Albert Einstein.

Mais tarde, ao tentar incorporar a gravitação na sua teoria, Einstein desenvolveu a chamada Teoria da Relatividade Geral, publicada em 1915, na qual concluiu que o ritmo de um relógio depende não só da sua velocidade mas também do local em que este se encontra: relógios colocados em pontos mais baixos de um campo gravitacional atrasam-se em relação a relógios colocados em pontos mais altos.

Uma vez que os satélites do GPS são basicamente relógios em órbita (portanto movendo-se a grandes velocidades num ponto elevado do campo gravitacional da Terra), que devem estar

[2]Albert Einstein (1879 – 1955), físico alemão, prémio Nobel da Física (1921).

certos com uma precisão de nano-segundos, ambos os efeitos previstos por Einstein têm que ser cuidadosamente considerados.

3.1. **Relatividade Restrita.** Para calcular o atraso num relógio em movimento previsto pela teoria da Relatividade Restrita consideremos um referencial inercial S', que se move com velocidade v ao longo do eixo dos xx de um outro referencial inercial S. Em S' foi instalado um *relógio de luz*, formado por dois espelhos, E e F, colocados na origem e num certo ponto do eixo dos $y'y'$, como ilustrado na Figura 6. Um "tic" do relógio de luz corresponde a um ciclo em que um sinal luminoso parte do espelho E, é reflectido no espelho F, e regressa ao espelho E, ou seja, a um intervalo de tempo

$$\Delta t' = \frac{2\Delta y'}{c},$$

onde $\Delta y'$ é a distância entre os dois espelhos em S' e c é a velocidade da luz.

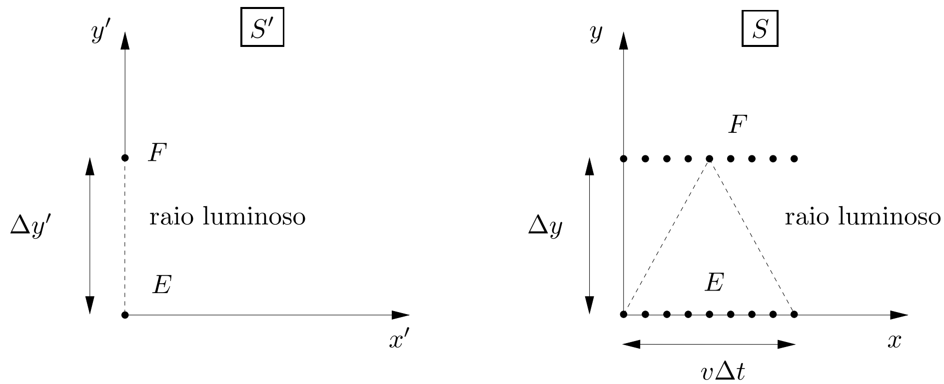

Figura 6. Relógio de luz.

No referencial S, no entanto, os espelhos estão em movimento, e portanto o sinal luminoso percorre uma distância diferente. Uma vez que a velocidade da luz possui o mesmo valor c em S, é claro da Figura 6 e do Teorema de Pitágoras que

$$(\Delta y)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2,$$

onde Δy é a distância entre os dois espelhos medida em S e Δt é o intervalo de tempo correspondente a um "tic" do relógio medido em S. Se admitirmos a hipótese razoável de que a distância entre os espelhos medida nos dois referenciais é a mesma, $\Delta y = \Delta y'$, obtemos

$$\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2,$$

donde rapidamente se conclui que o observador em S' mede um intervalo de tempo *menor* para um "tic" do seu relógio de luz do que um observador em S:

$$\boxed{\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

($\Delta t'$ é o intervalo de tempo medido por um observador que se move com velocidade v em relação a um observador inercial que mede um intervalo de tempo Δt). Esta é a famosa fórmula da dilatação do tempo: relógios em movimento funcionam a um ritmo mais lento do que relógios repouso. Em situações do dia-a-dia, as velocidades v são muito inferiores a c, e portanto $\Delta t'$ e Δt são muito aproximadamente iguais; no entanto, em situações que envolvam velocidades comparáveis à velocidade da luz (como por exemplo em aceleradores de partículas), ou grandes precisões na medida dos intervalos de tempo (como é o caso do GPS), a dilatação do tempo tem que ser levada em conta.

Referências Bibliográficas

GASPAR, Alberto. **Compreendendo a física: ensino médio**. São Paulo: Ática, 2010.

PIETROCOLA, Maurício P. Oliveira... **[et. al.] Física em contextos: pessoal, social e histórico: eletricidade e magnetismo, ondas eletromagnéticas, radiação e matéria.** 1ª ed. São Paulo: FTD, 2010.

SILVA, Cláudio Xavier da. FILHO, Begnino Barreto . **Física aula por aula: eletromagnetismo, ondulatória, física moderna**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2010.

CALÇADA, Caio Sérgio. SAMPAIO, José Luiz. **Física clássica 3: eletricidade e física moderna.** 1ª ed. São Paulo: Atual, 2012.

TIPLER, Paul A. MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros - vol.3 - física moderna: mecânica quântica, relatividade e a estrutura da matéria**. 6ª ed. LTC, 2009.

RESNICK, Robert. HALLIDAY, David. WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física 4 - Óptica e Física Moderna** - 9ª Edição – LTC- 2012.

http://sprg.tecnico.pt/media/cms_page_media/21/GPS.pdf

http://exame.abril.com.br/tecnologia/noticias/sem-teoria-da-relatividade-de-einstein-gps-nao-existiria - Acesso em: 2 mai. 2016.

http://sprg.tecnico.pt/media/cms_page_media/21/GPS.pdf - Acesso em: 2 mai. 2016.

http://www.gps.gov/systems/gps/ - Acesso em: 2 mai. 2016.

http://www.scielo.br/pdf/rbef/v33n2/a14v33n2.pdf - - Acesso em: 2 mai. 2016.