FÍSICA MODERNA I - 1^o SEMESTRE 2016
6^a LISTA DE EXERCíCIOS

1.- Uma partícula está sujeita ao potencial de um oscilador harmônico, cuja função de onda é dada por:

$$\Psi(x) = Ae^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

(a) Seria a quantidade de movimento uma constante neste estado? Se sua resposta for positiva, determine o valor da quantidade de movimento. Se for negativa, determine o valor médio da quantidade de movimento. O que seria obtido em medidas da quantidade de movimento da partícula neste estado?

(b) É a energia mecânica conservada neste estado? Se sua resposta for positiva, determine o valor da energia. Se for negativa, determine o valor médio da energia. Que você obteria numa medida da energia da partícula neste estado?

c) Calcule $< x >$ e $< x^2 >$ para essa partícula.

d) Calcule a incerteza na medida da posição da partícula, definida como o desvio padrão.

e) Repita o cálculo de c) e d) para o momento da partícula e verifique se o princípio de incerteza é obedecido neste caso.

2) A função de onda para uma partícula confinada numa caixa de largura a é dada por:

$$\begin{cases} A\sin\frac{2\pi x}{a}e^{-iEt/\hbar} \; -a/2 < x < a/2 \\ 0 \; x < -a/2 \; ou \; x > a/2 \end{cases}$$

a) Verifique que esta função é uma solução da equação de Schroedinger. b) Determine o valor da energia total E neste estado.

3.- Repita o cálculo do potencial degrau realizado em classe, para a condição E>Vo, considerando agora a função:

$$V(x) = \begin{cases} V_o \, para \, x < 0 \\ 0 \, para \, x \geq 0 \end{cases}$$

Calcule os coeficientes de transmissão e reflexão e compare-os com os obtidos em classe.

4.- Mostre que o problema de uma partícula passando por um poço de potencial ($V = 0$ para $x < 0$, $V = -V_o$ para $0 \leq x \leq a$ e $V = 0$ para $x > a$, com $E > 0$ é equivalente ao da barreira de potencial de altura V_o nas mesmas condições.

5.- Uma reação de fusão importante na produção de energia solar envolve a captura de um próton por um núcleo de carbono, que tem carga seis vezes maior que a do próton e um raio $r \sim 2 \cdot 10^{-15}$ m. a) Faça uma estimativa do potencial coulombiano V que atua sobre o próton se ele estiver na superfície do núcleo. b) O próton incide sobre o núcleo devido seu movimento térmico. Podemos realisticamente supor que sua energia total não seja muito maior que 10kT, onde $T \sim 10^7 K$ é a temperatura no interior do sol. Calcule sua energia total nessas condições e compare com a altura da barreira calculada no ítem anterior. c) Calcule a probabilidade de que o próton possa penetrar em uma barreira retangular equivalente, de altura V e se estendendo de r a 2r, o ponto em que a barreira cai para V/2.

6.- Um átomo do gás nobre kripton exerce um potencial atrativo sobre um elétron não ligado que varia muito bruscamente. Devido a isto, é uma aproximação razoavel descrever o potencial como um poço quadrado atrativo de raio igual a $4 \cdot 10^{-10}$ m, o raio do átomo. As experiências mostram que um elétron com energia cinética de 0,7 eV nas regiões fora do átomo pode atravessá-lo sem sofrer praticamente reflexão nenhuma. O fenomeno é chamado *efeito Ramsauer*. Use essa informação para determinar a profundidade (V_o) do poço quadrado.

7.- Uma partícula confinada numa caixa de paredes impenetráveis e largura L está num estado cuja função de onda $\Psi(x,t)$ é dada pela combinação linear:

$$\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t)$$

onde Ψ_1 e Ψ_2 são as auto-funções de energia normalizadas para o estado fundamental (energia E_1) e para o primeiro estado excitado (energia E_2) respectivamente e c_1 e c_2 são constantes.

(a) Mostre que esta função de onda pode representar um estado quântico porque obedece a equação de Schrödinger dependente do tempo.

(b) Encontre o valor dessas constantes que normalizam a função de onda $\Psi(x,t)$.

(c) Seria a função de onda $\Psi(x,t)$ um auto-estado de energia? Se sua resposta for positiva, determine o valor da energia; se for negativa, determine a energia média deste estado em função das auto-energias E_1 e E_2. Em qualquer caso justifique sua resposta.

(d) Determine a densidade de probabilidade $\Psi^*\Psi$. O termo dependente do tempo representa uma oscilação. Obtenha a freqüência dessa oscilação e tente interpretá-la.

8) Um próton e um dêuteron (mesma carga do próton, massa duas vezes maior) tentam penetrar em uma barreira de potencial de altura 10 MeV e largura 10^{-14} m. As duas partículas têm energia de 3 MeV. a) Use argumentos qualitativos para prever qual das partículas tem maior probabilidade de consegui-lo. b) Calcule quantitativamente a probabilidade de sucesso para cada uma das partículas.

9) Aplique a condição de normalização para mostrar que a constante multiplicativa para a autofunção com n=3 do poço de potencial quadrado infinito é $B_3 = \sqrt{2/a}$.

10) Uma bola de bilhar, de massa m=0.2 kg e energia E é jogada na direção de uma rampa inclinada, de altura H=10 cm. Para E=1.001*mgH, calcule qual a probabilidade da bola não conseguir subir a rampa.

11) Um dos estados excitados do átomo de hidrogênio tem função de onda dada por:

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = Ar^2 e^{-r/3a}\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$$

onde A é uma constante e o sistema de coordenadas é o esférico.

a) Qual a expressão para o componente na direção z do momento angular nesse sistema?

b) Utilizando o resultado do ítem a), qual o componente z do momento angular para o átomo de higrogênio no estado descrito pela função de onda acima?

12) No caso da barreira de potencial com E>Vo, como desenvolvido nas notas de aula: a) Mostre que se B=0, o coeficiente de transmissão será igual a 1. b) Mostre que nesse caso, a densidade de probabilidade para se encontrar a partícula na região 0<x<a é dada por:

$$\Psi^*_{II}\Psi_{II} = C^*C(\frac{k_1}{k_2})^2\left[1-(1-(\frac{k_2}{k_1})^2)\cos^2 k_2x\right]$$

c) Verifique também que a condição B=0 implica em $k_2a = n\pi$, n=1,2,3,...

13) Encontre $|\Psi|^2 = \Psi(x)^*\Psi(x)$ para as soluções da barreira de potencial (E<Vo e E>Vo)

14) A constante da força restauradora C para vibrações interatômica em uma molécula diatômica típica é de aproximadamente 10^3J/m^2. Use esse valor para fazer uma estimativa da energia de ponto zero das vibrações moleculares.

15) (a) Faça uma estimativa da diferença em energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado da molécula vibrando considerada no problema anterior. (b) A partir dessa estimativa, determine a energia do fóton emitido por vibrações da distribuição de cargas quando o sistema faz uma transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental. (c) Determine também a freqüência do fóton e compare com a freqüência de oscilação clássica do sistema. (d) Em que região do espectro está a radiação emitida?

16.- No instante t=0, um sistema é descrito pela seguinte função de onda normalizada:

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{1}{5}}\Phi_0(x) + \sqrt{\frac{1}{2}}\Phi_2(x) + c\Phi_3(x)$$

onde Φ_0, $\Phi_1 e \Phi_3$ são as autofunções normalizadas do oscilador harmônico. Calcular o valor numérico de c? Qual o valor esperado da energia se é efetuada a medida dessa no instante t=0?

17.- Mostre que um oscilador harmônico com energia $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ corresponde à amplitude de um oscilador clássico $A_n = \sqrt{(2n+1)\hbar/m\omega}$.