Notas de Aula - Cap. 7

<u>Ex. 1</u>. - Este é um exercício bastante geral sobre funções de onda.

É dado $\Psi(x) = A\, e^{-m\omega x^2/2\hbar}$. Como não se fala nada sobre a parte temporal, ela é, obviamente $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ ∴ $\Psi(x,t) = A\, e^{-m\omega x^2/2\hbar}\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

Tomando $\alpha = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$, o valor de A pode ser obtido, impondo-se a condição de normalização da função de onda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)\,dx = 1 \Rightarrow A^*A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2}\,dx = 1$$

sabendo-se: $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/\lambda}$; $A^*A\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}} = 1$

$|A|^2 = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\pi}}$ => (note que A é real neste caso):

$$\boxed{A = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4}} \quad \text{ou} \quad A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

(a) Para saber se uma grandeza é conservada (é uma constante), deve-se em princípio, mostrar que o seu valor médio, num dado intervalo não depende do valor de x_1:

$x_1 - x_2 + \Delta x$

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \Psi^*\hat{g}\,\Psi\,dx = \int_{x_2}^{x_2+\Delta x} \Psi^*\hat{g}\,\Psi\,dx, \text{ onde } \hat{g}$$

é o operador quântico p/ a grandeza g. O resultado deve valer para qualquer x_1, x_2. Pode-se verificar que isso é equivalente à relação:

$$\hat{g}\Psi = g\Psi$$

No caso do momento linear, com $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$,

$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) = -i\hbar\frac{d}{dx}\Psi(x) = 2i\hbar\alpha x A e^{-\alpha x^2}$. Portanto não se verifica a relação acima, e o momento linear não é constante. (Como tb não o é no OH clássico). O valor médio é dado por:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{p} \Psi \, dx = A^* A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2}\right) dx$$

$$= -2i\hbar A^* A \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2\alpha x^2} dx = 0$$ (pois o integrando é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico). Tb no caso clássico, o valor médio do momento linear é nulo.

b) O operador energia é $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$. Aplicando na função de onda:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} A e^{-\alpha x^2} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = E \cdot A e^{-\alpha x^2} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = E \cdot \Psi(x,t)$$

Portanto a energia da partícula é uma constante do movimento (é conservada).

c)
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*_{(x,t)}\, x\, \Psi(x,t)\, dx = A^*A \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x\, e^{-2\alpha x^2}}_{} dx = 0$$

ímpar!

$$\langle x^2 \rangle = A^*A \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = 2A^*A \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx .$$

Sabendo-se: $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \cdot \lambda^{-3/2}$ (Notas de aula, pg. 21)

$$\langle x^2 \rangle = |A^2| \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \cdot (2\alpha)^{-3/2}$$

. Substituindo-se os valores de A e α, obtem-se o resultado.

d) Incerteza $= \Delta x = \sqrt{\sigma_x^2}$; Por definição,

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle (x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2) \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 .$$

Portanto, como $\langle x \rangle = 0$, $\boxed{\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}}$

e) Analogamente pode-se obter

$\Delta p = \sqrt{\sigma_p^2}$; $\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$.