O Método de Euler: Solução numérica da segunda lei de Newton

R.V. Ribas

16 de junho de 2006

Muitas vezes, a solução de um problema de dinâmica, pode ser muito difícil ou mesmo impossível analiticamente. Nesses casos, uma técnica bastante usada na solução de problemas físicos (ou seja de equações diferenciais ou integrais), são os procedimentos de cálculo numérico. Alguns exemplos simples são de o uma órbita eliptica, o de duas massas ligadas a uma mola, como o ex.5 da lista 7 ou o lançamento de um foguete, onde se inclui a resistência do ar, a variação da força gravitacional com a altura e mudanças de direção da força de propulsão do foguete (o texto abaixo é parte de uma atividade prática de FEP2195 realizado em 2005).

O método de Euler

No método de Euler para resolver equações diferenciais, as derivadas são aproximadas como razões de diferenças finitas. Sendo $\overrightarrow{F}(x, y, z, v, t)$ a força resultante agindo sobre uma partícula, a aceleração é determinada pela segunda lei de Newton:

$$\overrightarrow{a}(x, y, z, t) = \overrightarrow{F}(x, y, z, v, t)/m$$

Considerando um pequeno incremento de tempo Δt, a relação entre aceleração e velocidade pode ser aproximada como:

$$a_x(t) \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \; (1)$$

e analogamente para os outros componentes. Deste modo, sabendo-se $v_x(t)$, $v_x(t + \Delta t)$ pode ser obtido como:

$$v_x(t + \Delta t) = v(t) + a_x(t)\Delta t$$

a posição $x(t + \Delta t)$pode ser então obtida como (conhecendo-se $x(t)$:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

agora a eq. (1) pode ser utilizada para se obter a aceleração no instante $t' = t + \Delta t$. O processo é então repetido, partindo-se das condições iniciais do problema com $t = t_0$, $v_x = v_{x0}$, e analogamente com os outros componentes. No caso da órbita de um satélite, a aceleração do mesmo a uma distância $\overrightarrow{r}$ do centro da Terra é dada por:

$$\overrightarrow{a} = -\frac{GM}{r^3}\overrightarrow{r}$$

onde M é a massa da Terra. Os componentes da aceleração (a órbita é plana!) são dados por:

$$a_x = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \; a_y = -\frac{GMy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Para resolver o problema, começe, por exemplo com $x = 0$, $y = 2R_T$ e $v_x = 5000$m/s, $v_y = 0$. Teste vários valores de Δt, começando, por exemplo com $\Delta t = 5$s.