Lançamento de Foguetes

R.V. Ribas

22 de outubro de 2013

1 Equação do Foguete

Vamos considerar um sistema formado, no instante t, por um foguete de massa m e velocidade v e o total da massa do gás ejetado desde $t = 0$, m_g. A massa total do sistema é constante, $m_i = m + m_g$. Considerando o sistema isolado, o seu momento total é conservado:

$$P = P_f + P_g = cte.; \; P_f = mv; \; P_g = \int_o^t u(t')dm_g = \int_o^t u(t')(\frac{dm_g}{dt'})dt'$$

onde $u(t')$ é a velocidade da massa dm ejetada entre t' e $t' + dt'$. Veja que cada porção dm do gás tem velocidade diferente. Com $dP/dt = 0 = dP_f/dt + dP_g/dt$ temos,

$$\frac{dP_f}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \quad e \quad \frac{dP_g}{dt} = u\frac{dm_g}{dt}$$

Como $\frac{dm_g}{dt} = -\frac{dm}{dt}$, temos então a conhecida equação do foguete:

$$m\frac{dv}{dt} + (v - u)\frac{dm}{dt} = 0$$

ou, com $u_{rel} = -(v - u) = -v_e$ onde $v_e = |u_{rel}|$ é a velocidade de escape dos gases,

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}$$

2 Lançamento sob a ação da gravidade

No lançamento de um foguete discutido na sala de aula, considerou-se a resultante das forças externas igual a zero, o que é apropriado para descrever o movimento de um foguete no espaço vazio. No caso do lançamento de um foguete verticalmente na superfície da Terra, deve-se considerar ainda uma força externa, igual ao peso do foguete. Pode ser facilmente demonstrado que a equação do foguete nesse caso é:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt} - m_i g$$

onde m é a massa do foguete no instante t. A solução desta equação, pode ser facilmente obtida tomando-se $m = m_i - \alpha t$, com $\alpha = \left|\frac{dm}{dt}\right|$:

$$v_f - v_i = -v_e \ln\frac{m_f}{m_i} + \frac{m_i g}{\alpha}\ln\frac{m_f}{m_i}$$

$$v(t) = (\frac{m_i g}{\alpha} - v_e)\ln\frac{m_i - \alpha t}{m_i}$$

O gráfico de $v(t)$, considerando-se os dados do foguete modelo descrito no exercício 7 da lista 6 ($m_i = 79$g, $\alpha = 6.7$g/s, $v_e = 790$m/s é visto na Fig. 1. Note que o resultado acima é válido somente para $t < 1,9$s, enquanto dura o combustível. De maneira similar pode-se obter $x(t)$, definindo-se $v_r = -(\frac{m_i g}{\alpha} - v_e)$ (note que $v_r > 0$) e resolvendo-se a equação:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -v_r \ln \frac{m_i - \alpha t}{m_i}$$

o resultado não é difícil de ser obtido, lembrando que$\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$:

$$x(t) = \frac{v_r m_i}{\alpha} \left[\frac{m_i - \alpha t}{m_i} \left(\ln \frac{m_i - \alpha t}{m_i} - 1 \right) + 1 \right]$$

O gráfico de $x(t)$ para o foguete modelo também é mostrado na figura.

A solução do problema do lançamento de um foguete de grande porte, capaz de colocar um satélite em órbita é bem mais complicada, pois nesse caso a aceleração da gravidade não pode mais ser considerada constante, além de haver mecanismos de orientação da direção do vôo, com os quais o foguete muda a direção vertical inicial. O efeito da resistência do ar deve ser ainda incluido numa descrição mais realista. Nesses casos, uma solução numérica do problema, como a que empregaremos no exercício de órbitas elípticas é em geral utilizada.

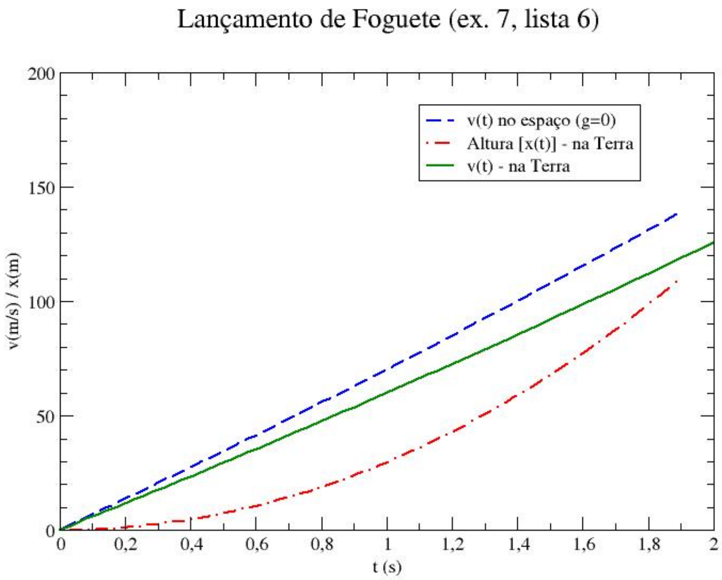

Figura 1: Gráfico de v(t) e x(t) para o foguete-modelo lançado da superfície da Terra. A curva tracejada mostra v(t) na ausência da força gravitacional.